

N° d'enregistrement
au C.N.R.S. A0 6941

THESE

présentée à l'U. E. R. de Mathématiques
de
l'Université de Nantes
par

J. GAPAILLARD

en vue de l'obtention du titre de
Docteur ès sciences Mathématiques

RELEVEMENTS BASES DE DERIVATION ENSEMBLISTES & FONCTIONNELLES

Soutenue le 13 avril 1972 devant la Commission d'examen

Président Chr. PAUC, Nantes

Examineurs { H. BAUER, Erlangen-Nürnberg
M. METIVIER, Rennes
J. PETRESCO, Nantes
PHAM THE LAI, Nantes

N° d'enregistrement
au C.N.R.S. A0 6941

THESE

présentée à l'U. E. R. de Mathématiques
de
l'Université de Nantes
par

J. GAPAILLARD

en vue de l'obtention du titre de
Docteur ès sciences Mathématiques

RELEVEMENTS BASES DE DERIVATION ENSEMBLISTES & FONCTIONNELLES

Soutenue le 13 avril 1972 devant la Commission d'examen

Président Chr. PAUC, Nantes

Examineurs { H. BAUER, Erlangen-Nürnberg
M. METIVIER, Rennes
J. PETRESCO, Nantes
PHAM THE LAI, Nantes



TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION	1
CHAPITRE I RELEVEMENTS	7
§1 - Relèvements d'ensembles mesurables	7
1.1 Notations	7
1.2 Divers types de relèvements	8
1.3 Relèvements et mesurabilité	22
§2 - Relèvements linéaires et densités	34
§3 - Relèvements d'ensembles ayant la propriété de BAIRE ...	41
CHAPITRE II DERIVATION	48
§1 - Bases de dérivation fonctionnelles de VITALI	48
1.1 Notations et définitions	48
1.2 Théorèmes de dérivation	52
1.3 Existence de bases de dérivation fonctionnelles de VITALI	69
§2 - Dérivation fonctionnelle globale dans un groupe topolo- gique localement compact	72
2.1 Notations	72
2.2 Quelques résultats de mesurabilité	73
2.3 Théorèmes de dérivation	86
BIBLIOGRAPHIE	96

INTRODUCTION

La théorie des relèvements a été développée ces dix dernières années essentiellement par A. et C. IONESCU TULCEA. Dans le livre de ces auteurs "Topics in the Theory of Lifting" ([19]) elle est exposée dans le cadre d'une théorie de l'intégration construite au moyen d'une intégrale supérieure abstraite. Le point de vue adopté dans ce travail est celui de D. KÖLZOW dans son ouvrage "Differentiation von Massen" ([21]) qui, se plaçant dans un espace mesuré quelconque $(E, \mathcal{M}, \varphi)$, s'intéresse à des relèvements sur $\mathcal{M}$ par rapport à l'idéal des ensembles mesurables localement de mesure nulle. Aussi, en ce qui concerne ce sujet, la terminologie employée ici sera-t-elle, pour l'essentiel celle de D. KÖLZOW, laquelle diffère notablement de celle utilisée par A. et C. IONESCU TULCEA.

Le premier chapitre est entièrement consacré aux relèvements. On peut d'abord y distinguer des résultats de nature purement algébrique qui sont regroupés dans la note [11]. Parmi ceux-ci, un premier ensemble de résultats (§1, 1.2) tire son origine de la généralité des relèvements L considérés par D. KÖLZOW lesquels, au contraire de ceux de A. et C. IONESCU TULCEA, ne sont pas nécessairement "réguliers" c'est-à-dire qu'ils ne sont pas astreints à vérifier $L(E) = E$ et $L(\emptyset) = \emptyset$. Dans ces conditions il est naturel de se demander si l'existence d'un relèvement d'un type donné implique celle d'un relèvement régulier de même type. Il est très facile de répondre affirmativement à cette question lorsqu'il s'agit d'un relèvement monotone. Par contre, dans le cas d'un relèvement linéaire au sens de D. KÖLZOW, c'est-à-dire respectant l'intersection et la réunion, la réponse est moins simple et a été donnée dans le cadre général d'une algèbre de BOOLE par J. von NEUMANN et M. H. STONE dans [23]. L'examen de la démonstration de ces auteurs fait apparaître d'une part l'importance de l'utilisation d'idéaux maximaux et d'autre part l'intérêt de la notion de relèvement L "associé" à un relèvement L , $(L'(M) = [L([M)])$. A ce sujet et en introduisant sur les relèvements une relation d'ordre naturelle, on remarque que toute densité inférieure (resp. supé-

rieure) L telle que $L(\emptyset) = \emptyset$ (resp. $L(E) = E$) est majorée (resp. minorée) par son associé L' , alors qu'un relèvement monotone, même régulier, n'est en général pas comparable avec son associé. Cependant le théorème 1, obtenu en s'inspirant de la démonstration de J. von NEUMANN et M. H. STONE évoquée ci-dessus, affirme que l'existence d'un relèvement monotone implique celle d'un relèvement monotone régulier égal à son associé. Ce résultat permet en retour d'alléger la démonstration des auteurs précités (théorème 2). On remarquera que les démonstrations de ces deux théorèmes utilisent que L et L' sont des relèvements de même nature. Cette propriété étant fautive pour les densités inférieures ou supérieures, c'est par une démonstration similaire mais différente que le cas de ces relèvements a été traité (théorèmes 6 et 6').

Les autres résultats algébriques (§2) sont formulés pour des relèvements sur une algèbre $\mathcal{A}$ de parties d'un ensemble E par rapport à un idéal $\mathcal{I}$ de $\mathcal{A}$ supposé être aussi un idéal de $\mathcal{P}(E)$. En observant qu'il existe un rapport étroit entre les densités inférieures et certaines familles d'idéaux attachés à chaque point de E , il est démontré que l'existence d'une densité inférieure implique celle d'un relèvement linéaire (corollaire 4). De plus, les relèvements linéaires réguliers sont caractérisés comme étant des densités inférieures (resp. supérieures) régulières maximales (resp. minimales) (théorème 13). Dans le cas d'un espace mesuré convenable, le corollaire 4 a déjà été prouvé par A. IONESCU TULCEA dans [16] mais la démonstration de cet auteur s'appuie essentiellement sur l'existence d'une topologie associée canoniquement à la densité inférieure et ce n'est qu'au prix de modifications très artificielles, comme l'a aussi remarqué S. GRAF, qu'il serait possible de l'utiliser dans des situations plus générales où une telle topologie canonique n'existerait pas. Cet inconvénient a amené S. GRAF dans [12] à élaborer une nouvelle démonstration pour établir l'existence d'un relèvement linéaire sur la tribu des parties ayant la propriété de BAIER dans un espace de même nom, par rapport à l'idéal des ensembles de première catégorie. C'est cette démonstration qui a inspiré les considérations générales de ce paragraphe 2, le corollaire 4 redonnant à son tour le résultat de S. GRAF (§3, théorème 15).

Dans le cas d'un espace mesuré où la mesure n'est pas supposée σ -finie, les énoncés constituant la partie 1.3 du premier paragraphe constituent en diverses généralisations de résultats de mesurabilité en liaison avec des relèvements. Primitivement établis par D. MAHARAM dans [22] et par A. et C. IONESCU TULCEA dans [18] et [19], ils affirment par exemple qu'un ensemble non nécessairement dénombrable de parties mesurables A telles que $A = L(A)$ (ou seulement $A \subset L(A)$) a une réunion mesurable si le relèvement L est linéaire, ceci dans un cadre convenable. Ces résultats, initialement annoncés dans [6], figurent ici dans des versions améliorées tels qu'ils doivent être publiés dans [10]. Cette étude met particulièrement en évidence l'importance de la notion de relèvement monotone introduite par D. KÖLZOW dans [21]. Il ressort en effet que les propriétés de mesurabilité évoquées ci-dessus sont uniquement liées à la monotonie et non à la linéarité du relèvement en cause. Les démonstrations s'appuient sur un lemme simple dont une première application est l'obtention aisée d'une généralisation d'un théorème de recouvrement du type de LINDELÖF établi par D. KÖLZOW dans [21] (théorème 7). Le principal résultat de mesurabilité est la caractérisation de relèvements possédant une propriété voisine de celle envisagée par A. et C. IONESCU TULCEA comme étant ceux à majorant monotone (théorème 8). Par les mêmes techniques, on peut obtenir un résultat analogue à l'un de ces théorèmes de mesurabilité dans le cas d'un relèvement monotone dans un espace de BAIRE séparable (§3, théorème 17) ce qui permet, dans un tel espace, d'associer canoniquement une topologie à toute densité inférieure L telle que $L(E) = E$.

Les questions de mesurabilité ci-dessus avaient été initialement étudiées pour répondre à une question posée par D. KÖLZOW dans [21], ce qui a été, en fait, le point de départ de ce travail. Il s'agissait de prouver que l'existence d'un relèvement monotone implique celle d'un relèvement linéaire. Le résultat, obtenu par l'intermédiaire d'une décomposition en est annoncé dans [7] et la démonstration en est publiée dans [10]. Celle qui figure ici est plus simple et permet d'établir l'existence d'une décomposition de l'espace à partir d'un relèvement monotone sans qu'il soit nécessaire de supposer la mesure complète

(§1, Théorème 3). Il en résulte une réponse affirmative à la question de D. KÖLZOW lorsque l'espace mesuré coïncide avec son extension de CARATHÉODORY, ce qui permet de compléter le théorème d'équivalence de D. KÖLZOW (§1, Théorème 4). Signalons qu'une réponse à la question de D. KÖLZOW a été également donnée par W. STRAUSS dans [29] dans le cadre de l'intégrale de STONE.

Dans le second chapitre, on s'intéresse successivement à la dérivation ponctuelle et à la dérivation globale.

Une notion abstraite et très générale de base de dérivation a été dégagée par R. de POSSEL dans [26] où sont données en particulier plusieurs caractérisations des bases de dérivation satisfaisant à une condition de VITALI faible et nommées par cet auteur "systèmes de voisinages en mesure". Dans deux notes ultérieures, [27] et [28], R. de POSSEL a développé une généralisation "fonctionnelle" de son premier article, dérivant cette fois au moyen de fonctions et non plus au moyen d'ensembles. Mais les démonstrations des résultats de ces deux notes n'ont jamais été publiées. Ceci explique en partie qu'elles soient longtemps restées dans l'ombre et que, jusqu'à ces toutes dernières années, elles n'aient pas suscité l'intérêt qu'elles méritaient. Ces travaux ont cependant été commentés par C. A. HAYES et C. Y. PAUC dans [15] et plus récemment par A. M. BRUCKNER dans [4], article qui contient une mise au point détaillée sur la théorie de la dérivation.

Le premier paragraphe consiste en un développement de la note [8]. L'étude des bases de dérivation fonctionnelles y est abordée dans un espace mesuré quelconque indépendamment des deux notes précitées de R. de POSSEL en essayant systématiquement de généraliser les travaux "ensemblistes" de cet auteur dans [26] avec l'aide de l'exposé très complet de cette question dans [14]. Aussi les notions ensemblistes de bases de dérivation de VITALI sont étendues au cas fonctionnel. Le principal résultat concerne les bases de VITALI de type faible qui correspondent aux "systèmes faiblement dérivants" de R. de POSSEL dans [27]

et pour lesquelles sont énoncées neuf propriétés caractéristiques (théorème 20), résultat contenant le théorème 1 de [27].

Il convient de noter que l'intérêt pour les bases de dérivation de VITALI s'est encore accru depuis que D. KÖLZOW a montré dans [21] que l'existence d'une telle base ensembliste équivaut à celle d'un relèvement linéaire, résultat étendu ici au cas fonctionnel (théorème 23). En fait, la base de dérivation de VITALI construite par D. KÖLZOW à partir d'un relèvement linéaire est de type "très fort". Le théorème 19 affirme qu'une telle base fonctionnelle dérive toute mesure admettant, en un certain sens, un intégrant de RADON-NIKODYM par rapport à la mesure de base. Ce sont donc en particulier des "systèmes fortement dérivants" au sens de R. de POSSEL dans [27].

Le second paragraphe traite de dérivation fonctionnelle globale dans un groupe localement compact. Pour cela une base de dérivation fonctionnelle est définie ayant cette particularité que les bases de dérivation de chaque point se déduisent de l'une d'elle par translation. Ce type de base qui s'introduit naturellement dans les groupes topologiques correspond à la notion d'"approximate identity" chez C. IONESCU TULCEA dans [20]. Les résultats ainsi obtenus généralisent directement ceux de nature ensembliste de J. BOCLE dans [2]. Mais alors que cet auteur utilise exclusivement des mesures de BOREL régulières, il a semblé préférable d'abandonner le cadre de P. R. HALMOS ([13]) pour celui de N. BOURBAKI, quitte à ne pas perdre de vue le côté fonction σ -additive d'ensemble d'une mesure de RADON. Il apparaît en effet que si, dans un espace localement compact, les points de vue mesure de RADON et de BOREL régulière sont en un certain sens équivalents, ce dernier n'est pas adapté à l'étude des espaces produits au moyen de la notion de produit cartésien de deux mesures. De même que dans [2], les théorèmes de dérivation énoncés et figurant déjà dans [9] s'appuient sur une analyse préalable de questions de mesurabilité. On notera cependant que toutes les mesures de BOREL considérées dans [2] sont implicitement supposées "completion regular" au sens de [13] et [1]. Tout en généralisant le résultat de mesurabilité de J. BOCLE dans ce cas, on évitera complètement cette hypothèse pour établir les théorèmes de dérivation.

Je tiens à exprimer ici toute ma gratitude à Monsieur le Professeur Chr. PAUC de Nantes qui m'a orienté dans mes recherches et dont la grande expérience, les judicieux conseils et les encouragements constants m'ont permis de mener à bien ce travail.

J'ai été sensible à l'honneur que m'ont fait Messieurs les Professeurs H. BAUER d'Erlangen et M. METIVIER de Rennes en acceptant de faire partie du jury de cette thèse ; qu'ils en soient vivement remerciés.

Monsieur PHAM THE LAI, Maître de Conférences à Nantes, a bien voulu me proposer un second sujet et je l'en remercie très sincèrement.

Mes remerciements s'adressent également à Monsieur le Professeur J. PETRESCO, Vice-Président de l'Université de Nantes, que je suis honoré de compter parmi les membres du jury.

Je veux aussi exprimer ma reconnaissance à mes anciens professeurs et principalement à Madame BRILLOUËT qui, après m'avoir enseigné les mathématiques spéciales, m'a encouragé à me tourner vers la recherche.

La présentation soignée de cette thèse est due à Madame Gisèle GUILLEME, ma soeur, ce dont je lui sais gré.

Et mes pensées vont particulièrement à ma femme, Christiane, dont l'aide morale m'a été si précieuse et à qui je dédie ce travail.

CHAPITRE I - RELEVEMENTS

§ 1 - RELEVEMENTS D'ENSEMBLES MESURABLES

1.1. Notations

On considère un espace mesuré $(E, \mathcal{M}, \varphi)$ où $\mathcal{M}$ est une tribu (σ -algèbre) de parties de E et φ une mesure réelle positive (finie ou non) sur $\mathcal{M}$.

On pose alors :

$$\mathcal{S} = \{S ; S \in \mathcal{M} , \varphi(S) < +\infty\}$$

$$\mathcal{S}_+ = \{S ; S \in \mathcal{S} , \varphi(S) > 0\}$$

$$\mathcal{N} = \{N ; N \in \mathcal{M} , \varphi(N) = 0\}$$

$$\mathcal{N}_{loc} = \{N ; N \in \mathcal{M} , N \cap S \in \mathcal{N} \quad \forall S \in \mathcal{S}\}$$

et, si φ^* désigne la mesure extérieure associée à φ :

$$\mathcal{N}^* = \{N ; N \subset E , \varphi^*(N) = 0\}$$

$$\mathcal{N}_{loc}^* = \{N ; N \subset E , N \cap S \in \mathcal{N}^* \quad \forall S \in \mathcal{S}\}$$

On rappelle que l'espace mesuré $(E, \mathcal{M}, \varphi)$ coïncide avec son extension de CARATHEODORY si et seulement si

(a) la mesure φ est complète

(b) $\mathcal{M} = \{M ; M \subset E , M \cap S \in \mathcal{M} \quad \forall S \in \mathcal{S}\}$

Dans ce cas

$$(N \in \mathcal{N}_{loc} , A \subset N) \text{ implique } A \in \mathcal{N}_{loc}$$

De façon générale, A et B étant deux parties de E , on posera

$$A - B = A \cap \bar{B} \quad \text{et} \quad A \Delta B = (A - B) \cup (B - A) .$$

D'autre part, si $\mathcal{A}$ est un ensemble de parties de E et si B est une partie de E , on utilisera des notations du type suivant :

$$\bigcup \mathcal{A} = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A , \quad \bigcap \mathcal{A} = \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A$$

$$\mathcal{A} \cap B = \{A \cap B ; A \in \mathcal{A}\}$$

et si $(E, \mathcal{M}, \varphi)$ est un espace mesuré et si $M \in \mathcal{M}$, on désignera par φ_M la restriction de φ à $\mathcal{M} \cap M$.

1.2. Divers types de relèvements

Définition 1.

Soit $(E, \mathcal{M}, \varphi)$ un espace mesuré. Une application L de $\mathcal{M}$ dans lui-même est un relèvement si

- (i) $L(M) \Delta M \in \mathcal{N}_{loc}$ pour tout $M \in \mathcal{M}$
- (ii) $(M_1, M_2 \in \mathcal{M}, M_1 \Delta M_2 \in \mathcal{N}_{loc})$ entraîne $L(M_1) = L(M_2)$.

Un relèvement est dit

- monotone si $(M_1, M_2 \in \mathcal{M}, M_1 \subset M_2)$ entraîne $L(M_1) \subset L(M_2)$
- linéaire si $L(M_1 \cup M_2) = L(M_1) \cup L(M_2)$ quels que soient $M_1, M_2 \in \mathcal{M}$ (densité supérieure)
et si $L(M_1 \cap M_2) = L(M_1) \cap L(M_2)$ quels que soient $M_1, M_2 \in \mathcal{M}$ (densité inférieure)
- sous-U-relèvement si $L(M_1 \cup M_2) \subset L(M_1) \cup L(M_2)$ quels que soient $M_1, M_2 \in \mathcal{M}$
- sur-I-relèvement si $L(M_1 \cap M_2) \supset L(M_1) \cap L(M_2)$ quels que soient $M_1, M_2 \in \mathcal{M}$
- régulier si $L(\emptyset) = \emptyset$ et $L(E) = E$
- borné si $L(\mathcal{F}) \subset \mathcal{F}$

Remarques.

1. La définition d'un relèvement monotone donnée ci-dessus est évidemment équivalente à la suivante :

$$(M_1, M_2 \in \mathcal{M}, M_1 - M_2 \in \mathcal{N}_{loc}) \text{ entraîne } L(M_1) \subset L(M_2).$$

2. Cette notion de relèvement monotone, dont l'importance est montrée dans ce chapitre, a été introduite dans [21] par D. KÖLZOW à qui est empruntée en partie la terminologie de ce travail.

3. Il est immédiat que tout relèvement linéaire et, plus généralement, toute densité supérieure ou inférieure est monotone.

4. Selon d'autres terminologies, on désigne simplement par relèvement (lifting) ce que nous appelons ici relèvement linéaire régulier.

5. Un relèvement régulier ne peut exister que si l'espace mesuré $(E, \mathcal{M}, \varphi)$ considéré est non trivial en ce sens que $E \notin \mathcal{N}_{loc}$.

Définition 2.

L'ensemble des relèvements sur $\mathcal{M}$ étant ordonné par

$$L_1 \leq L_2 \quad \text{si et seulement si} \quad L_1(M) \subset L_2(M) \quad \text{pour tout} \quad M \in \mathcal{M}$$

un relèvement L sur $\mathcal{M}$ qui est majoré (resp. minoré) par un relèvement monotone est dit à majorant monotone (resp. à minorant monotone).

Si L est un relèvement sur $\mathcal{M}$, il est clair que l'application L' de $\mathcal{M}$ dans lui-même définie par

$$L'(M) = \bigcup L(\bigcup M) \quad \text{pour tout} \quad M \in \mathcal{M}$$

est aussi un relèvement sur $\mathcal{M}$.

Définition 3.

L étant un relèvement sur $\mathcal{M}$, le relèvement noté L' défini ci-dessus est dit relèvement associé à L .

Les propriétés suivantes sont immédiates :

Lemme 1.

Soit L un relèvement sur $\mathcal{M}$.

- (1) $(L')' = L$
- (2) L est monotone si et seulement si L' est monotone
- (3) L est à majorant monotone si et seulement si
 L' est à minorant monotone
- (4) L est une densité supérieure si et seulement si L' est une densité inférieure
- (5) L est un sous-U-relèvement si et seulement si L' est un sur-I-relèvement
- (6) Si L est un sous-U-relèvement (resp. sur-I-relèvement) tel que $L(E) = E$ (resp. $L(\emptyset) = \emptyset$) on a $L' \leq L$ (resp. $L \leq L'$)
- (7) Si L est un relèvement monotone tel que $L' \leq L$ (resp. $L \leq L'$) on a $L(E) = E$ (resp. $L(\emptyset) = \emptyset$)
- (8) L est régulier si et seulement si L' est régulier
- (9) L est linéaire si et seulement si L' est linéaire, et si, de plus, L est régulier, on a $L' = L$.

La question se pose de savoir si, dans un espace mesuré non trivial, l'existence d'un relèvement L d'un type donné entraîne celle d'un relèvement régulier L_0 de même type.

Lorsque l'espace mesuré coïncide avec son extension de CARATHEODORY, la réponse est immédiate et affirmative pour L sous-U- ou sur-I-relèvement grâce au théorème 4 ci-dessous.

Dans le cas général, le problème a été résolu pour un relèvement linéaire par J. von NEUMANN et M. H. STONE dans [23] où un résultat plus général est établi. Nous allons donner une version différente de la démonstration de ce théorème et, pour cela, nous nous intéresserons d'abord au cas d'un relèvement monotone.

Pour un relèvement monotone L , la question se résout facilement (voir [21]). Il suffit en effet de définir L_0 par

$$L_0(M) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } M \in \mathcal{N}_{loc} \\ E & \text{si } E - M \in \mathcal{N}_{loc} \\ L(M) & \text{dans les autres cas} \end{cases}$$

Mais ce résultat peut s'améliorer de la manière suivante. On remarque qu'un relèvement monotone L , même régulier, n'est en général pas comparable avec son associé L' . Cependant, en s'inspirant de la démonstration de J. von NEUMANN et M. H. STONE évoquée plus haut, on peut établir le résultat suivant.

Théorème 1.

Soit $(E, \mathcal{M}, \varphi)$ un espace mesuré non trivial.

- (1) S'il existe sur $\mathcal{M}$ un relèvement monotone L , il existe un relèvement monotone régulier L_0 tel que $L_0 = L'_0$.
- (2) Si de plus L vérifie $L(\emptyset) = \emptyset$ et $L \leq L'$, et si $\mathcal{J}$ est un idéal propre de $\mathcal{M}$ contenant $\mathcal{N}_{loc}$, on peut exiger $L \leq L_0$ et $L = L_0$ sur $\mathcal{J}$.

Démonstration

Soit L un relèvement monotone sur $\mathcal{M}$.

Soit L_1 l'application de $\mathcal{M}$ dans lui-même définie par

$$L_1(M) = L(M) \cap L'(M) \text{ pour tout } M \in \mathcal{M}.$$

Il est évident que L_1 est un relèvement tel que $L_1(\emptyset) = \emptyset$. De plus, L étant monotone il en est de même de L'

(lemme 1, (2)) donc de L_1 . Enfin, pour tout $M \in \mathcal{M}$:

$$\begin{aligned} L_1(M) &= L(M) \cap L'(M) \subset L'(M) \cup L(M) \\ &= \bigcap \{ [L'(M)] \cap [L(M)] \} = \bigcap [L([M] \cap L'([M])] \\ &= L'_1(M) \end{aligned}$$

d'où $L_1 \leq L'_1$

Soit $\mathcal{J}$ un idéal propre de $\mathcal{M}$ contenant $\mathcal{N}_{loc}$. Une algèbre de BOOLE étant en particulier un anneau avec élément-unité, $\mathcal{J}$ est contenu dans un idéal maximal $\mathcal{J}_0$ qui est aussi un idéal premier.

Considérons alors l'application L_0 de $\mathcal{M}$ dans lui-même définie par

$$L_0(M) = \begin{cases} L_1(M) & \text{si } M \in \mathcal{J}_0 \\ L'_1(M) & \text{si } M \notin \mathcal{J}_0 \end{cases}$$

Il est d'abord évident que

$$L_0(M) \Delta M \in \mathcal{N}_{loc} \text{ pour tout } M \in \mathcal{M}.$$

De plus, si $M_1, M_2 \in \mathcal{M}$ avec $M_1 \Delta M_2 \in \mathcal{N}_{loc}$, on a $M_1 \Delta M_2 \in \mathcal{J}_0$ de sorte que M_1 et M_2 sont conjointement dans $\mathcal{J}_0$ ou hors de $\mathcal{J}_0$. Dans les deux cas il est clair que $L_0(M_1) = L_0(M_2)$.

Ainsi L_0 est un relèvement sur $\mathcal{M}$ et

$$L_0(\emptyset) = L_1(\emptyset) = \emptyset$$

$$L_0(E) = L'_1(E) = \bigcap [L_1(\emptyset)] = E.$$

Soient maintenant $M_1, M_2 \in \mathcal{M}$ avec $M_1 \subset M_2$. Comme les relèvements L_1 et L'_1 sont monotones, $L_0(M_1) \subset L_0(M_2)$ est évident si M_1 et M_2 sont conjointement dans $\mathcal{J}_0$ ou hors de $\mathcal{J}_0$. La seule autre possibilité est $M_1 \in \mathcal{J}_0$, $M_2 \notin \mathcal{J}_0$, et, puisque $L_1 \leq L'_1$, il vient :

$$L_0(M_1) = L_1(M_1) \subset L'_1(M_1) \subset L'_1(M_2) = L_0(M_2).$$

Donc L_0 est un relèvement monotone.

Montrons que $L_0 = L'_0$. Si $M \in \mathcal{M}$, $M \Delta \bigcap M = E \notin \mathcal{J}_0$ montre que M et $\bigcap M$ ne peuvent appartenir tous les deux à $\mathcal{J}_0$ et, $\mathcal{J}_0$ étant un idéal premier, $M \cap \bigcap M = \emptyset \in \mathcal{J}_0$.

implique que l'un d'eux appartient à $\mathcal{J}_0$. D'où, si $M \in \mathcal{J}_0$:

$$L'_0(M) = \bigcap L_0(M) = \bigcap L'_1(M) = L_1(M) = L_0(M)$$

et, si $M \notin \mathcal{J}_0$:

$$L'_0(M) = \bigcap L_0(M) = \bigcap L_1(M) = L'_1(M) = L_0(M).$$

Enfin L_0 coïncide avec L_1 sur $\mathcal{J}_0$, donc sur $\mathcal{J}$,
et, si $M \notin \mathcal{J}_0$:

$$L_0(M) = L'_1(M) \supset L_1(M)$$

de sorte que $L_1 \leq L_0$ et les parties (1) et (2) du théorème sont démontrées.

Lemme 2.

Soit $(E, \mathcal{M}, \varphi)$ un espace mesuré. S'il existe sur $\mathcal{M}$ un relèvement linéaire (resp. sous-U-relèvement, sur-I-relèvement) L , il existe sur $\mathcal{M}$ un relèvement linéaire (resp. sous-U-relèvement, sur-I-relèvement) L_0 tel que $L_0(\emptyset) = \emptyset$.

Démonstration

De façon générale, il est évident que si L est un relèvement sur $\mathcal{M}$, l'application L_0 de $\mathcal{M}$ dans lui-même définie par

$$L_0(M) = L(M) - L(\emptyset) \text{ pour tout } M \in \mathcal{M}$$

est un relèvement tel que $L_0(\emptyset) = \emptyset$.

De plus, si L est linéaire, on a :

$$L_0(M_1 \cup M_2) = [L(M_1) \cup L(M_2)] - L(\emptyset) = L_0(M_1) \cup L_0(M_2)$$

$$\text{et } L_0(M_1 \cap M_2) = [L(M_1) \cap L(M_2)] - L(\emptyset) = L_0(M_1) \cap L_0(M_2)$$

de sorte que L_0 est linéaire.

On voit de même, en remplaçant certaines des égalités ci-dessus par des inclusions convenables, que, si L est un sous-U- ou un sur-I-relèvement, L_0 est de même nature.

Nous pouvons maintenant établir le résultat suivant annoncé plus haut et dont l'énoncé est plus précis que dans [23].

Théorème 2. (J. von NEUMANN et M. H. STONE) (voir [23], théorème 15)

Soit $(E, \mathcal{M}, \varphi)$ un espace mesuré non trivial.

- (1) S'il existe sur $\mathcal{M}$ un relèvement linéaire L , il existe
un relèvement linéaire régulier L_0 .
- (2) Si de plus L vérifie $L(\emptyset) = \emptyset$ et si $\mathcal{J}$ est un idéal pro-
pre de $\mathcal{M}$ contenant $\mathcal{N}_{loc}$, on peut exiger $L \leq L_0$ et
 $L = L_0$ sur $\mathcal{J}$.

Démonstration

Soit L un relèvement linéaire sur $\mathcal{M}$. D'après le lemme 2 on peut toujours supposer $L(\emptyset) = \emptyset$. Il résulte alors du lemme 1, (6), que $L \leq L'$.

Soit $\mathcal{J}$ un idéal propre de $\mathcal{M}$ contenant $\mathcal{N}_{loc}$. $\mathcal{J}$ est contenu dans un idéal maximal $\mathcal{J}_0$ et, d'après la démonstration du théorème 1, on sait que l'application L_0 de $\mathcal{M}$ dans lui-même définie par

$$L_0(M) = \begin{cases} L(M) & \text{si } M \in \mathcal{J}_0 \\ L'(M) & \text{si } M \notin \mathcal{J}_0 \end{cases}$$

est un relèvement monotone régulier tel que $L_0 = L'_0$, $L \leq L_0$ et $L = L_0$ sur $\mathcal{J}$.

D'autre part, L étant en particulier une densité supérieure telle que $L \leq L'$, il vient pour tout $M \in \mathcal{M}$:

$$L(E) \cap L'(M) = [L(M) \cup L(\mathcal{J}_0)] \cap L'(M) = L(M)$$

d'où

$L(M_1) \cap L(M_2) = L(M_1) \cap L'(M_2)$ quels que soient $M_1, M_2 \in \mathcal{M}$ et il en résulte facilement que L_0 est une densité inférieure puisque, pour $M_1, M_2 \in \mathcal{M}$, les seuls cas possibles sont

$$\begin{aligned} & M_1 \cap M_2, \quad M_1, M_2 \in \mathcal{J}_0 \\ & M_1 \cap M_2, \quad M_1, M_2 \notin \mathcal{J}_0 \\ & \text{et } M_1 \cap M_2, \quad M_1 \in \mathcal{J}_0, \quad M_2 \notin \mathcal{J}_0 \end{aligned}$$

Enfin, comme $L_0 = L'_0$, il résulte du lemme 1, (4), que L_0 est aussi une densité supérieure. L_0 est donc un relèvement linéaire et le théorème est démontré.

Lemme 3.

Soit $(E, \mathcal{M}, \varphi)$ un espace mesuré et L un relèvement monotone
sur $\mathcal{M}$ tel que $L \leq L'$ (resp. $L' \leq L$).

Alors

$(M_1, M_2 \in \mathcal{M} \text{ , } M_1 \cap M_2 \in \mathcal{N}_{loc})$ implique $L(M_1) \cap L(M_2) = \emptyset$
[resp. $(M_1, M_2 \in \mathcal{M} \text{ , } (M_1 \cup M_2) \in \mathcal{N}_{loc})$ implique
 $L(M_1) \cup L(M_2) = E$].

Démonstration

Comme $L \leq L'$ signifie que

$$L(\bigcup M) \subset \bigcup L(M) \text{ pour tout } M \in \mathcal{M}$$

si $M_1, M_2 \in \mathcal{M}$ avec $M_1 \cap M_2 \in \mathcal{N}_{loc}$ il vient :

$$L(M_1) \cap L(M_2) = L(M_1) \cap L(M_2 - M_1) \subset L(M_1) \cap L(\bigcup M_1) \subset L(M_1) \cap \bigcup L(M_1) = \emptyset.$$

Le résultat dual s'obtient par passage aux complémentaires
et en échangeant les rôles de L et L' .

Notons que les implications du lemme sont en fait des
équivalences en raison de la monotonie de L .

Lemme 4.

Soit $(E, \mathcal{M}, \varphi)$ un espace mesuré et L un relèvement sur
tel que

$(S_1, S_2 \in \mathcal{S}_+ \text{ , } S_1 \cap S_2 \in \mathcal{N})$ implique $L(S_1) \cap L(S_2) = \emptyset$.

Alors l'espace mesuré $(E, \mathcal{M}, \varphi)$ possède une décomposition.

Démonstration

Rappelons qu'il s'agit de prouver l'existence d'une partie
 $\mathcal{Z}$ de $\mathcal{S}_+$ telle que :

- (α) les éléments de $\mathcal{Z}$ sont deux à deux disjoints
- (β) pour tout $S \in \mathcal{S}_+$, il existe $Z \in \mathcal{Z}$ tel que
 $S \cap Z \in \mathcal{S}_+.$

La démonstration est alors exactement celle de D. KÖLZOW
dans [21], théorème 7, pour obtenir une décomposition à partir
d'un relèvement linéaire.

On considère

$$\Sigma = \{ \sigma ; \sigma \subset \mathcal{G}_+ , \quad S' \cap S'' \in \mathcal{N} \quad \text{si} \quad S', S'' \in \sigma , \quad S' \neq S'' \}$$

Par l'axiome de ZORN, il est immédiat que Σ admet pour l'inclusion un élément maximal σ_0 . Il est alors évident, moyennant l'hypothèse faite sur L , que

$$\mathcal{L} = \{ S \cap L(S) ; \quad S \in \sigma_0 \}$$

est une décomposition de $(E, \mathcal{M}, \varphi)$.

On en déduit le résultat suivant :

Théorème 3.

Un espace mesuré $(E, \mathcal{M}, \varphi)$ tel qu'il existe sur $\mathcal{M}$ un relèvement monotone L , possède une décomposition.

Démonstration

Il suffit de faire correspondre à L le relèvement monotone L_1 considéré dans la démonstration du théorème 1 et qui satisfait à $L_1 \leq L'_1$, et d'utiliser les lemmes 3 et 4.

Le résultat de ce théorème 3 a déjà été annoncé dans [7] pour un espace mesuré $(E, \mathcal{M}, \varphi)$ coïncidant avec son extension de CARATHEODORY. La démonstration était alors basée sur les résultats de mesurabilité qui suivent. Elle a été publiée dans [10] où l'on a remarqué qu'il suffisait que la mesure φ soit complète. Quant à la nouvelle démonstration qui précède, elle présente le double avantage d'être beaucoup plus simple et de ne nécessiter aucune hypothèse sur l'espace mesuré ! En particulier, cette démonstration est pratiquement la même que celle que l'on ferait à partir d'une densité inférieure ou même d'un sur-I-relèvement. Enfin, signalons que ce résultat a été obtenu indépendamment dans le cadre de l'intégrale de STONE par W. STRAUSS dans [29].

L'énoncé suivant donne une réponse affirmative à une question posée par D. KÖLZOW dans [21] (à ce sujet, voir aussi [29]).

Corollaire 1.

Si un espace mesuré $(E, \mathcal{M}, \varphi)$ coïncide avec son extension de CARATHEODORY, l'existence sur $\mathcal{M}$ d'un relèvement monotone implique celle d'un relèvement linéaire.

Démonstration

Il suffit d'utiliser que, dans un tel espace mesuré, l'existence d'une décomposition entraîne celle d'un relèvement linéaire (voir [21] et la démonstration du théorème 4 ci-dessus)

Remarquons que cette démonstration s'appuie essentiellement sur le théorème fondamental de D. MAHARAM et J. von NEUMANN d'existence d'un relèvement linéaire pour un espace dont la mesure est finie et complète (voir [22], [17] et [19]).

Le résultat suivant est plus précis que le théorème 3 :

Corollaire 2.

Si un espace mesuré $(E, \mathcal{M}, \varphi)$ coïncide avec son extension de CARATHEODORY et s'il existe sur $\mathcal{M}$ un relèvement monotone L , il existe sur $\mathcal{M}$ un relèvement monotone borné L_0 tel que $L_0 \leq L$ et il existe une décomposition $\mathcal{Z}_0$ de l'espace mesuré telle que $L_0(Z) = Z$ pour tout $Z \in \mathcal{Z}_0$.

Démonstration

D'après le théorème 3, il existe une décomposition $\mathcal{Z}$ de l'espace mesuré. D'autre part $L_1(M) = L(M) - L(\emptyset)$ définit sur $\mathcal{M}$ un relèvement monotone L_1 tel que $L_1 \leq L$ et $L_1(\emptyset) = \emptyset$. Posons alors pour tout $M \in \mathcal{M}$

$$L_0(M) = \bigcup_{Z \in \mathcal{Z}} L_1(M \cap Z) \cap Z$$

Comme pour chaque $Z \in \mathcal{Z}$ on a

$$L_0(M) \cap Z = L_1(M \cap Z) \cap Z \in \mathcal{M}$$

et comme l'espace mesuré coïncide avec son extension de

CARATHEODORY, il résulte de [21], lemme 6, que $L_0(M) \in \mathcal{M}$.

D'autre part

$$(M_1, M_2 \in \mathcal{M}, M_1 \Delta M_2 \in \mathcal{N}_{loc}) \text{ entraîne } (M_1 \cap Z) \Delta (M_2 \cap Z) \in \mathcal{N} \\ \text{pour tout } Z \in \mathcal{Z}$$

d'où

$$L_1(M_1 \cap Z) \cap Z = L_1(M_2 \cap Z) \cap Z \text{ pour tout } Z \in \mathcal{Z} \\ \text{et par suite } L_0(M_1) = L_0(M_2).$$

De plus, pour chaque $Z \in \mathcal{Z}$:

$$[M \Delta L_0(M)] \cap Z = [(M \cap Z) \Delta L_1(M \cap Z)] \cap Z \in \mathcal{N}$$

d'où $M \Delta L_0(M) \in \mathcal{N}_{loc}$ ([21], lemme 6).

L_0 est donc un relèvement sur $\mathcal{M}$ évidemment monotone et tel que $L_0 \leq L_1 \leq L$.

On utilise maintenant que pour chaque $S \in \mathcal{Y}_+$, il existe une suite (éventuellement finie) (Z_n) de $\mathcal{Z}$ telle que $S \cap Z_n \in \mathcal{Y}_+$ tandis que $S \cap Z \in \mathcal{N}$ si $Z \in \mathcal{Z}$ avec $Z \neq Z_n$ pour tout n ([21], lemme 6).

Alors, si $S \in \mathcal{N}$ on a $L_0(S) \subset L_1(S) = \emptyset$ et si $S \in \mathcal{Y}_+$

$$L_0(S) = \bigcup_{Z \in \mathcal{Z}} L_1(S \cap Z) \cap Z = \bigcup_n L_1(S \cap Z_n) \cap Z_n$$

d'où

$$L_0(S) - S = \bigcup_n ([L_1(S \cap Z_n) \cap Z_n] - [S \cap Z_n]) \in \mathcal{N}$$

et par conséquent $L_0(S) \in \mathcal{Y}_+$. L_0 est donc borné.

Enfin $\mathcal{Z}_0 = L_0(\mathcal{Z})$ est une décomposition car

$$L_0(Z) = L_1(Z) \cap Z \subset Z \text{ pour tout } Z \in \mathcal{Z}$$

montre que les éléments de $\mathcal{Z}_0$ sont deux à deux disjoints (propriété (α)) ; de plus, pour chaque $S \in \mathcal{Y}_+$, il existe $Z \in \mathcal{Z}$ tel que $S \cap Z \in \mathcal{Y}_+$, d'où aussi $S \cap L_0(Z) \in \mathcal{Y}_+$ (propriété (β)) tandis que $\mathcal{Z}_0 \subset \mathcal{Y}_+$ puisque $L_0(\mathcal{Y}_+) \subset \mathcal{Y}_+$.

L'énoncé qui suit complète le théorème d'équivalence de D. KÖLZOW ([21], théorème 21).

Théorème 4.

Pour un espace mesuré $(E, \mathcal{M}, \varphi)$ non trivial coïncidant avec son extension de CARATHEODORY, les conditions suivantes sont équivalentes :

- (1) $(E, \mathcal{M}, \varphi)$ possède une décomposition
- (2) Il existe sur $\mathcal{M}$ un relèvement linéaire borné
- (3) Il existe sur $\mathcal{M}$ un relèvement linéaire régulier
- (4) Il existe sur $\mathcal{M}$ un relèvement monotone
- (5) Il existe sur $\mathcal{M}$ un sous-U-relèvement
- (6) Il existe sur $\mathcal{M}$ un sur-I-relèvement
- (7) Il existe sur $\mathcal{M}$ un relèvement L tel que
 $(M_1, M_2 \in \mathcal{M} \text{ , } M_1 \cap M_2 \in \mathcal{N}_{loc})$ implique $L(M_1) \cap L(M_2) = \emptyset$
- (8) Il existe sur $\mathcal{M}$ un relèvement L tel que
 $(S_1, S_2 \in \mathcal{Y} \text{ , } S_1 \cap S_2 \in \mathcal{N})$ implique $L(S_1) \cap L(S_2) = \emptyset$
- (9) Il existe sur $\mathcal{M}$ un relèvement L tel que
 $(S_1, S_2 \in \mathcal{Y}_+ \text{ , } S_1 \cap S_2 \in \mathcal{N})$ implique $L(S_1) \cap L(S_2) = \emptyset$.

Démonstration

Les implications $(3) \Rightarrow (4)$, $(3) \Rightarrow (5)$,
 $(7) \Rightarrow (8) \Rightarrow (9)$ sont triviales.
 $(2) \Rightarrow (3)$ d'après le théorème 2, $(5) \Rightarrow (6)$ d'après le lemme 1, (5) , $(9) \Rightarrow (1)$ d'après le lemme 4 et c'est en remarquant en particulier que $(4) \Rightarrow (7)$ que le théorème 3 a été démontré.

$(6) \Rightarrow (7)$

Car si L est un sur-I-relèvement, on peut toujours supposer $L(\emptyset) = \emptyset$ d'après le lemme 2 et, si $M_1, M_2 \in \mathcal{M}$ avec $M_1 \cap M_2 \in \mathcal{N}_{loc}$, il vient

$$L(M_1) \cap L(M_2) \subset L(M_1 \cap M_2) = \emptyset$$

$(1) \Rightarrow (2)$

Il suffit de remarquer que le relèvement linéaire obtenu par D. KÖLZOW dans [21], théorème 7, à partir d'une décomposition, est borné. Rappelons sa définition. Si Z est un élément de la décomposition $\mathcal{Z}$, on considère l'espace mesuré

$(Z, \mathcal{M} \cap Z, \psi_Z)$ où l'on remarque que la mesure ψ_Z est complète et finie. On sait alors qu'il existe sur $\mathcal{M} \cap Z$ un relèvement linéaire L_Z que l'on peut toujours choisir tel que $L_Z(\emptyset) = \emptyset$ et, pour $M \in \mathcal{M}$, on pose

$$L(M) = \bigcup_{Z \in \mathcal{Z}} L_Z(M \cap Z)$$

L'application L de $\mathcal{M}$ dans lui-même ainsi définie est un relèvement linéaire dont on démontre qu'il est borné par la méthode déjà utilisée dans la démonstration du corollaire 2.

Remarque

L'hypothèse de CARATHEODORY n'est intervenue que pour
(1) $\Rightarrow$ (2) .

On peut maintenant se demander s'il est possible d'ajouter aux conditions équivalentes du théorème 4 l'existence d'un relèvement linéaire à la fois régulier et borné. Une condition manifestement nécessaire pour qu'il existe sur $\mathcal{M}$ un relèvement régulier et borné est que E ne soit pas réunion d'un ensemble de mesure finie et d'un ensemble localement de mesure nulle mais de mesure infinie. Le théorème suivant montre que cette condition est aussi suffisante pour obtenir la propriété désirée et traite en même temps le cas d'un relèvement monotone.

Théorème 5.

Si $(E, \mathcal{M}, \varphi)$ est un espace mesuré non trivial tel que E ne s'écrit pas $S \cup N$ où $S \in \mathcal{F}$ et $N \in \mathcal{N}_{loc} - \mathcal{N}$, l'existence sur $\mathcal{M}$ d'un relèvement linéaire (resp. monotone) borné implique celle d'un relèvement linéaire (resp. monotone) régulier et borné.

Démonstration

Le cas $\varphi(E) < +\infty$ étant trivial, nous supposons désormais $\varphi(E) = +\infty$. Soit L un relèvement sur $\mathcal{M}$ linéaire, ou seulement monotone, et borné. En remplaçant au besoin

$L(M)$ par $L(M) - L(\emptyset)$, on obtient encore un relèvement de même nature et borné, de sorte que l'on peut toujours supposer $L(\emptyset) = \emptyset$.

Remarquons alors que l'ensemble $\mathcal{Y}^*$ des parties mesurables du type $S \Delta N$ où $S \in \mathcal{Y}$ et $N \in \mathcal{N}_{loc}$ est un idéal de $\mathcal{M}$ et c'est un idéal propre car si

$$E = S \Delta N = (S - N) \cup (N - S)$$

on a $S - N \in \mathcal{Y}$ et $N - S \in \mathcal{N}_{loc} - \mathcal{N}$ puisque $\varphi(E) = +\infty$, ce qui est contraire à l'hypothèse. Enfin $\mathcal{Y}^*$ contient $\mathcal{N}_{loc}$.

Il résulte alors des théorèmes 1, (2) et 2, (2) qu'il existe sur $\mathcal{M}$ un relèvement linéaire régulier L_0 de même nature que L et coïncidant avec L sur $\mathcal{Y}^*$. L étant borné et $\mathcal{Y}^*$ contenant $\mathcal{Y}$, L_0 est borné.

On remarquera que dans le cas monotone on obtient par le théorème 1, (2) un relèvement monotone régulier, borné et vérifiant $L = L'$.

Pour terminer cette section, revenant au cas d'un espace mesuré $(E, \mathcal{M}, \varphi)$ non trivial quelconque, on s'intéressera à la question de savoir si l'existence sur $\mathcal{M}$ d'une densité inférieure (resp. supérieure) implique l'existence sur $\mathcal{M}$ d'une densité inférieure (resp. supérieure) régulière. La réponse, affirmative, sera obtenue en s'inspirant des démonstrations des théorèmes 1 et 2. Ces démonstrations ne peuvent toutefois se reproduire exactement ici car elles reposent sur la propriété qu'ont les relèvements L et L' d'être conjointement monotones ou linéaires, propriété dont on ne dispose plus pour une densité inférieure ou supérieure.

Théorème 6.

Soit $(E, \mathcal{M}, \varphi)$ un espace mesuré non trivial.

- (1) S'il existe sur $\mathcal{M}$ une densité inférieure L , il existe une densité inférieure régulière L_0 .
- (2) Si de plus L vérifie $L(\emptyset) = \emptyset$ et si $\mathcal{J}$ est un idéal propre de $\mathcal{M}$ contenant $\mathcal{N}_{loc}$, on peut exiger $L \leq L_0$ et $L = L_0$ sur $\mathcal{J}$.

Démonstration

Soit L une densité inférieure sur $\mathcal{M}$. Il est évident qu'on peut toujours supposer $L(\emptyset) = \emptyset$ (voir démonstration du lemme 2).

Soit $\mathcal{J}$ un idéal propre de $\mathcal{M}$ contenant n_{loc} . $\mathcal{J}$ est contenu dans un idéal maximal $\mathcal{J}_0$ et on considère l'application L_0 de $\mathcal{M}$ dans lui-même définie par

$$L_0(M) = \begin{cases} L(M) & \text{si } M \in \mathcal{J}_0 \\ L(M) \cup [L(E)] & \text{si } M \notin \mathcal{J}_0 \end{cases}$$

Il est immédiat que L_0 est un relèvement sur $\mathcal{M}$ vérifiant :

$$L_0(\emptyset) = L(\emptyset) = \emptyset$$

$$\text{et } L_0(E) = L(E) \cup [L(E)] = E$$

Enfin L_0 est une densité inférieure. L'égalité

$L_0(M_1 \cap M_2) = L_0(M_1) \cap L_0(M_2)$ est évidente dans les cas

$$M_1 \cap M_2, \quad M_1, M_2 \in \mathcal{J}_0$$

$$\text{et } M_1 \cap M_2, \quad M_1, M_2 \notin \mathcal{J}_0$$

et, dans le cas

$$M_1 \cap M_2, \quad M_1 \in \mathcal{J}_0, \quad M_2 \notin \mathcal{J}_0$$

il vient, compte tenu de la monotonie de L :

$$\begin{aligned} L_0(M_1 \cap M_2) &= L(M_1 \cap M_2) = L(M_1) \cap L(M_2) \\ &= L(M_1) \cap [L(M_2) \cup [L(E)]] = L_0(M_1) \cap L_0(M_2). \end{aligned}$$

On en déduit le théorème dual suivant

Théorème 6'.

Soit $(E, \mathcal{M}, \varphi)$ un espace mesuré non trivial.

- (1) S'il existe sur $\mathcal{M}$ une densité supérieure L , il existe une densité supérieure régulière L_0 .
- (2) Si de plus L vérifie $L(E) = E$ et si $\mathcal{F}$ est un filtre de parties mesurables tel que $L(M) = E$ implique $M \in \mathcal{F}$, on peut exiger $L_0 \leq L$ et $L_0 = L$ sur $\mathcal{F}$.

1.3. Relèvements et mesurabilité

Nous allons maintenant examiner des questions de mesurabilité d'ensembles en liaison avec des relèvements. Beaucoup des résultats qui suivent sont contenus dans [10] et représentent des versions améliorées de ceux annoncés antérieurement dans [6]. La plupart des démonstrations reposeront essentiellement sur le lemme suivant

Lemme 5.

Soient $(E, \mathcal{M}, \varphi)$ un espace mesuré et $\mathcal{A}$ une partie de $\mathcal{M}$ filtrante supérieurement pour l'inclusion et telle que
 $\sup \varphi(\mathcal{A}) < +\infty$.

Alors il existe une suite croissante (B_n) de $\mathcal{A}$ telle que,
si $B = \bigcup_n B_n$, on ait:

$$\varphi(B) = \sup \varphi(\mathcal{A}) \quad \text{et} \quad A - B \in \mathcal{N} \quad \text{pour tout } A \in \mathcal{A}$$

Démonstration

Il est clair qu'il existe une suite (B_n) de $\mathcal{A}$ telle que $\sup_n \varphi(B_n) = \sup \varphi(\mathcal{A})$ et, $\mathcal{A}$ étant filtrant supérieurement, la suite (B_n) peut toujours être supposée croissante ; de sorte que, si $B = \bigcup_n B_n$, on a

$$\varphi(B) = \sup_n \varphi(B_n) = \sup \varphi(\mathcal{A}) .$$

Soit maintenant $A \in \mathcal{A}$. Comme $\mathcal{A}$ est filtrant supérieurement, il est facile de construire une suite croissante (A_n) de $\mathcal{A}$ telle que $A \cup B_n \subset A_n$ pour tout n , d'où

$$\varphi(B) \leq \varphi(A \cup B) \leq \varphi\left(\bigcup_n A_n\right) = \sup_n \varphi(A_n) \leq \sup_n \varphi(\mathcal{A}) = \varphi(B)$$

Il en résulte $\varphi(A \cup B) = \varphi(B)$ et par suite
 $\varphi(A - B) = 0$ puisque $\varphi(B) < +\infty$.

Une première application de ce lemme est l'obtention d'une généralisation d'un théorème de recouvrement de D. KÖLZOW ([21], théorème 16) obtenu par cet auteur en s'appuyant sur une récurrence transfinie et qui s'énonce ainsi : soient $(E, \mathcal{M}, \varphi)$ un espace mesuré coïncidant avec son extension de CARATHEODORY,

L un relèvement linéaire sur $\mathcal{M}$ tel que $L(\emptyset) = \emptyset$ et $\mathcal{A}$ une partie de $\mathcal{M}$ telle que $L(A) = A$ pour tout A de $\mathcal{A}$. Alors, pour toute partie P de $\bigcup \mathcal{A}$ de mesure extérieure finie, il existe une suite (A_n) de $\mathcal{A}$ telle que $P - \bigcup_n A_n \in \mathcal{N}^*$.

Théorème 7.

Soient $(E, \mathcal{M}, \varphi)$ un espace mesuré, L un relèvement monotone sur $\mathcal{M}$ et $\mathcal{A}$ une partie de $\mathcal{M}$ telle que $\bigcup \mathcal{A} - \bigcup L(\mathcal{A}) \in \mathcal{N}_{loc}^*$.

Alors, pour toute partie P de E de mesure extérieure finie et telle que $P - \bigcup \mathcal{A} \in \mathcal{N}^*$, il existe une suite (A_n) de $\mathcal{A}$ telle que

$$P - \bigcup_n A_n \in \mathcal{N}^*.$$

Démonstration

L'ensemble P étant de mesure extérieure finie, il existe $\bar{P} \in \mathcal{M}$ tel que $P \subset \bar{P}$ et $\varphi(\bar{P}) = \varphi^*(P)$. On pose alors $\tilde{\mathcal{M}} = \mathcal{M} \cap \bar{P}$, $\tilde{\varphi} = \varphi|_{\bar{P}}$, $\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A} \cap \bar{P}$ et on désigne par $\tilde{L}$ le relèvement relatif à l'espace mesuré $(\bar{P}, \tilde{\mathcal{M}}, \tilde{\varphi})$ et défini sur $\tilde{\mathcal{M}}$ par

$$\tilde{L}(M \cap \bar{P}) = L(M) \cap \bar{P} \quad \text{pour tout } M \in \mathcal{M}.$$

Si $\hat{\mathcal{A}}^*$ est l'ensemble des réunions finies d'éléments de $\hat{\mathcal{A}}$, $\hat{\mathcal{A}}^*$ est filtrant supérieurement et

$$\sup \tilde{\varphi}(\hat{\mathcal{A}}^*) \leq \varphi(\bar{P}) < +\infty.$$

Alors, d'après le lemme 5, il existe une suite $(\hat{A}_p^*)$ de $\hat{\mathcal{A}}^*$ et par conséquent une suite $(\hat{A}_n)$ de $\hat{\mathcal{A}}$ telles que si

$$\hat{B}^* = \bigcup_p \hat{A}_p^* = \bigcup_n \hat{A}_n$$

on ait

$$\hat{A} - \hat{B}^* \in \mathcal{N} \quad \text{pour tout } \hat{A} \in \hat{\mathcal{A}}.$$

Le relèvement $\tilde{L}$ étant évidemment monotone, il en résulte

$$\tilde{L}(\hat{A}) \subset \tilde{L}(\hat{B}^*) \quad \text{pour tout } \hat{A} \in \hat{\mathcal{A}}$$

d'où

$$\bigcup \tilde{L}(\hat{\mathcal{A}}) \subset \tilde{L}(\hat{B}^*).$$

Pour chaque n , soit $A_n \in \mathcal{A}$ tel que $\hat{A}_n = A_n \cap \bar{P}$.

Alors

$$P - \bigcup_n A_n \subset P - \hat{B}^* \subset (P - U\hat{\alpha}) \cup [U\hat{\alpha} - \hat{L}(\hat{B}^*)] \cup [\hat{L}(\hat{B}^*) - \hat{B}^*]$$

d'où le résultat désiré puisque

$$\begin{aligned} P - U\hat{\alpha} &= P - U\alpha \in \mathcal{N}^*, \\ \hat{L}(\hat{B}^*) - \hat{B}^* &\in \mathcal{N} \quad \text{et} \\ U\hat{\alpha} - \hat{L}(\hat{B}^*) &\subset U\hat{\alpha} - U\hat{L}(\hat{\alpha}) = [U\alpha - U_L(\alpha)] \cap \bar{P} \in \mathcal{N}^*. \end{aligned}$$

Considérant un espace mesuré $(E, \mathcal{M}, \varphi)$ où la mesure φ est complète et σ -finie, un relèvement linéaire L sur $\mathcal{M}$ et une partie $\mathcal{A}$ de $\mathcal{M}$ telle que $L(A) = A$ pour tout $A \in \mathcal{A}$, D. MAHARAM a montré ([22], théorème 4) que $U\mathcal{A}$ est mesurable. Depuis, A. et C. IONESCU TULCEA ont établi dans le cas fonctionnel un résultat qui contient le suivant : dans les conditions ci-dessus avec seulement $A \subset L(A)$ pour tout $A \in \mathcal{A}$ et de plus $\mathcal{A}$ filtrant supérieurement pour l'inclusion, $U\mathcal{A}$ est mesurable et $\varphi(U\mathcal{A}) = \sup \varphi(\mathcal{A})$ (voir [18], appendice A.I et surtout [19], chapitre III, théorème 3).

Nous allons d'abord étendre le résultat ci-dessus à des relèvements non nécessairement linéaires et même, d'une certaine manière, caractériser les relèvements qui possèdent cette propriété. Il ressortira en particulier des résultats qui suivent que, pour ces questions de mesurabilité, la propriété décisive des relèvements est la monotonie et non la linéarité.

Définition 4.

Soit $(E, \mathcal{M}, \varphi)$ un espace mesuré. Une partie $\mathcal{A}$ de $\mathcal{M}$ est dite (localement) presque filtrante supérieurement (resp. inférieurement) pour l'inclusion si, quels que soient $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$, il existe $A_3 \in \mathcal{A}$ tel que $(A_1 \cup A_2) - A_3$ (resp. $A_3 - (A_1 \cap A_2)$) appartient à $\mathcal{N}$ ($\mathcal{N}_{loc}$).

Pour simplifier les énoncés des théorèmes 8 et 8' ci-dessous, nous poserons encore la définition suivante

Définition 5.

Soit $(E, \mathcal{M}, \varphi)$ un espace mesuré. On dit qu'une partie $\mathcal{A}$ de $\mathcal{M}$ localement presque filtrante supérieurement (resp. inférieurement) possède la propriété de IONESCU TULCEA supérieure (resp. inférieure) si $\bigcup \mathcal{A} \in \mathcal{M}$ et

$$\varphi(\bigcup \mathcal{A} \cap S) = \sup \varphi(\mathcal{A} \cap S) \text{ pour tout } S \in \mathcal{G}$$

(resp. $\bigcap \mathcal{A} \in \mathcal{M}$ et

$$\varphi(\bigcap \mathcal{A} \cap S) = \inf \varphi(\mathcal{A} \cap S) \text{ pour tout } S \in \mathcal{G}).$$

Théorème 8.

Soit $(E, \mathcal{M}, \varphi)$ un espace mesuré coïncidant avec son extension de CARATHEODORY.

Pour un relèvement L sur $\mathcal{M}$ les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (1) L est à majorant monotone
- (2) Il existe un relèvement L_1 sur $\mathcal{M}$ tel que
($A, B \in \mathcal{M}$, $A \subset B$) implique $L(A) \subset L_1(B)$
- (3) Si $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$ est filtrant supérieurement et si
 $\bigcup \mathcal{A} - \bigcup L(\mathcal{A}) \in \mathcal{N}_{loc}$, $\mathcal{A}$ possède la propriété de IONESCU TULCEA supérieure
- (4) Si $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$ est localement presque filtrant supérieurement et si $\bigcup \mathcal{A} - \bigcup L(\mathcal{A}) \in \mathcal{N}_{loc}$, $\mathcal{A}$ possède la propriété de IONESCU TULCEA supérieure
- (5) Si $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$ est localement presque filtrant supérieurement et si $A \subset L(A)$ pour tout $A \in \mathcal{A}$, $\mathcal{A}$ possède la propriété de IONESCU TULCEA supérieure
- (6) Si $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$ est localement presque filtrant supérieurement et si $A = L(A)$ pour tout $A \in \mathcal{A}$, $\mathcal{A}$ possède la propriété de IONESCU TULCEA supérieure
- (7) L possède un plus petit majorant monotone.

Démonstration

(4) $\implies$ (5) $\implies$ (6) et (7) $\implies$ (1) sont évidents.

(1) $\implies$ (2)

Soit L_0 un majorant monotone de L . Alors, si $A, B \in \mathcal{M}$

et $A \subset B$, on a :

$$L(A) \subset L_0(A) \subset L_0(B).$$

(2) $\implies$ (3)

Soit $S \in \mathcal{Y}$. Comme $\mathcal{A} \cap S$ est filtrant supérieurement, le lemme 4 permet d'affirmer l'existence d'une suite croissante $(B_n \cap S)$ de $\mathcal{A} \cap S$ telle que, si $B = \bigcup_n B_n$, on ait $\varphi(B \cap S) = \sup \varphi(\mathcal{A} \cap S)$ et $(A \cap S) - (B \cap S)$ pour tout $A \in \mathcal{A}$.

Considérons l'espace mesuré $(S, \mathcal{M} \cap S, \varphi_S)$ et définissons sur $\mathcal{M} \cap S$ les relèvements $\tilde{L}$ et $\tilde{L}_1$ par $\tilde{L}(M \cap S) = L(M) \cap S$ et $\tilde{L}_1(M \cap S) = L_1(M) \cap S$ pour tout $M \in \mathcal{M}$.

Comme $(A \cap S) - (B \cap S) \in \mathcal{N}$ implique $L(A \cap S) \subset L_1(B \cap S)$, il vient $\tilde{L}(A \cap S) \subset \tilde{L}_1(B \cap S)$, d'où

$$\bigcup \tilde{L}(\mathcal{A} \cap S) \subset \tilde{L}_1(B \cap S).$$

Alors, si N désigne l'ensemble de mesure nulle $[\bigcup \mathcal{A} - \bigcup L(\mathcal{A})] \cap S$, on a

$$\begin{aligned} (B \cap S) - N &\subset (\bigcup \mathcal{A} \cap S) - N = \bigcup \mathcal{A} \cap \bigcup L(\mathcal{A}) \cap S \\ &\subset \bigcup L(\mathcal{A}) \cap S = \bigcup \tilde{L}(\mathcal{A} \cap S) \subset \tilde{L}_1(B \cap S). \end{aligned}$$

L'espace mesuré $(E, \mathcal{M}, \varphi)$ coïncidant avec son extension de CARATHEODORY, la mesure φ est en particulier complète et il résulte des inclusions ci-dessus que $\bigcup \mathcal{A} \cap S$ est mesurable. Ceci ayant lieu pour tout $S \in \mathcal{Y}$, l'hypothèse de CARATHEODORY fait que $\bigcup \mathcal{A}$ est mesurable. De plus, des relations ci-dessus, il résulte $\varphi(\bigcup \mathcal{A} \cap S) = \varphi(B \cap S)$ d'où finalement $\varphi(\bigcup \mathcal{A} \cap S) = \sup \varphi(\mathcal{A} \cap S)$ pour tout $S \in \mathcal{Y}$.

(3) $\implies$ (4)

Soit $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$ localement presque filtrant supérieurement et soit $\mathcal{A}^*$ l'ensemble des réunions finies d'éléments de $\mathcal{A}$. Alors $\mathcal{A}^*$ est filtrant supérieurement, $\bigcup \mathcal{A}^* = \bigcup \mathcal{A}$ et $\bigcup L(\mathcal{A}^*) \supset \bigcup L(\mathcal{A})$ de sorte que, compte tenu de l'hypothèse de CARATHEODORY, $\bigcup \mathcal{A}^* - \bigcup L(\mathcal{A}^*) \in \mathcal{N}_{loc}$ (voir section 1.1).

Il résulte alors de (3) que $\bigcup \mathcal{A} = \bigcup \mathcal{A}^* \in \mathcal{M}$.

De plus, si $S \in \mathcal{S}$,

$$\varphi(\bigcup \mathcal{A} \cap S) = \varphi(\bigcup \mathcal{A}^* \cap S) = \sup \varphi(\mathcal{A}^* \cap S)$$

Mais, $\mathcal{A}$ étant localement presque filtrant supérieurement, si

$A_i \in \mathcal{A}$ pour $i = 1, 2, \dots, n$, il existe $A_0 \in \mathcal{A}$ tel que

$$\left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right) - A_0 \in \mathcal{N}_{loc}$$

d'où

$$\varphi\left(\bigcup_{i=1}^n A_i \cap S\right) \leq \varphi(A_0 \cap S)$$

et par suite

$$\sup \varphi(\mathcal{A}^* \cap S) \leq \sup \varphi(\mathcal{A} \cap S).$$

L'inégalité inverse étant évidente, il vient finalement

$$\varphi(\bigcup \mathcal{A} \cap S) = \sup \varphi(\mathcal{A} \cap S) \text{ pour tout } S \in \mathcal{S}$$

(6) $\implies$ (7)

Soit $B \in \mathcal{M}$ et soit $\mathcal{A}_B = \{L(A) ; A \in \mathcal{M}, A \subset B\}$.

$\mathcal{A}_B$ est localement presque filtrant supérieurement d'où,

d'après (6), $\bigcup \mathcal{A}_B \in \mathcal{M}$.

Soit L_0 l'application de $\mathcal{M}$ dans lui-même définie par

$$L_0(B) = \bigcup \mathcal{A}_B \text{ pour tout } B \in \mathcal{M}.$$

Comme, d'après (6), on a, pour tout $S \in \mathcal{S}$,

$$\varphi[L_0(B) \cap S] = \sup_{\substack{A \in \mathcal{M} \\ A \subset B}} \varphi[L(A) \cap S] = \varphi(B \cap S) = \varphi[L(B) \cap S]$$

et comme $L(B) \subset L_0(B)$, il vient

$$\varphi([L_0(B) - L(B)] \cap S) = \varphi[L_0(B) \cap S] - \varphi[L(B) \cap S] = 0$$

d'où

$$L_0(B) \Delta L(B) = L_0(B) - L(B) \in \mathcal{N}_{loc}$$

et par suite

$$L_0(B) \Delta B \in \mathcal{N}_{loc}$$

De plus, en remarquant que

$$\mathcal{A}_B = \{L(A) ; A \in \mathcal{M}, A - B \in \mathcal{N}_{loc}\},$$

il est clair que $B_1 \Delta B_2 \in \mathcal{N}_{loc}$ entraîne $\mathcal{A}_{B_1} = \mathcal{A}_{B_2}$

donc $L_0(B_1) = L_0(B_2)$. L_0 est donc un relèvement sur $\mathcal{M}$

qui est évidemment monotone.

Si maintenant L_* désigne un relèvement monotone sur $\mathcal{M}$ qui majore L , on a pour chaque $B \in \mathcal{M}$

$$L_o(B) = \bigcup_{\substack{A \in \mathcal{M} \\ A \subset B}} L(A) \subset \bigcup_{\substack{A \in \mathcal{M} \\ A \subset B}} L_*(A) = L_*(B).$$

L_o est donc le plus petit relèvement monotone sur $\mathcal{M}$ majorant L , et le théorème est démontré.

Remarque

Il est facile d'obtenir (1) $\implies$ (7) directement. Il suffit en effet de considérer le relèvement L_o défini sur $\mathcal{M}$ par

$$L_o(M) = \bigcap_{\substack{L_* \text{ monotone} \\ L \leq L_*}} L_*(M)$$

On peut énoncer le résultat dual suivant :

Théorème 8'.

Soit $(E, \mathcal{M}, \varphi)$ un espace mesuré coïncidant avec son extension de CARATHEODORY.

Pour un relèvement L sur $\mathcal{M}$ les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (1') L est à minorant monotone
- (2') Il existe un relèvement L_1 sur $\mathcal{M}$ tel que
 $(A, B \in \mathcal{M}, B \subset A)$ implique $L_1(B) \subset L(A)$
- (3') Si $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$ est filtrant inférieurement et si
 $\cap L(\mathcal{A}) - \cap \mathcal{A} \in \mathcal{N}_{loc}$, $\mathcal{A}$ possède la propriété de IONESCU
TULCEA inférieure
- (4') Si $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$ est localement presque filtrant inférieurement
et si $\cap L(\mathcal{A}) - \cap \mathcal{A} \in \mathcal{N}_{loc}$, $\mathcal{A}$ possède la propriété de
IONESCU TULCEA inférieure
- (5') Si $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$ est localement presque filtrant inférieurement
et si $L(A) \subset A$ pour tout $A \in \mathcal{A}$, $\mathcal{A}$ possède la propriété
de IONESCU TULCEA inférieure

- (6') Si $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$ est localement presque filtrant inférieurement et si $L(A) = A$ pour tout $A \in \mathcal{A}$, $\mathcal{A}$ possède la propriété de IONESCU TULCEA inférieure
- (7') L possède un plus grand minorant monotone.

Démonstration

Soit L' le relèvement associé à L et soit $\mathcal{A}' = \{A; A \in \mathcal{A}\}$. Le théorème 8' résulte alors du théorème 8 en remarquant que, pour $n = 1, 2, \dots, 7$, L vérifie (n') si et seulement si L' vérifie (n). C'est immédiat pour $n = 1, 2, 7$ (voir lemme 1). Dans les autres cas il suffit de remarquer que la proposition (n') pour le couple $(L, \mathcal{A})$ équivaut à la proposition (n) pour le couple $(L', \mathcal{A}')$. On notera en particulier que

$$\bigcap L(\mathcal{A}) - \bigcap \mathcal{A} = \bigcup \mathcal{A}' - \bigcup L'(\mathcal{A}')$$

et que, compte tenu de

$$\varphi(\bigcup \mathcal{A}' \cap S) = \sup \varphi(\mathcal{A}' \cap S) \text{ pour tout } S \in \mathcal{S}$$

il vient

$$\begin{aligned} \varphi(\bigcap \mathcal{A} \cap S) &= \varphi(S) - \varphi(\bigcup \mathcal{A}' \cap S) = \varphi(S) - \sup \varphi(\mathcal{A}' \cap S) \\ &= \varphi(S) - [\varphi(S) - \inf \varphi(\mathcal{A} \cap S)] \\ &= \inf \varphi(\mathcal{A} \cap S), \text{ pour tout } S \in \mathcal{S}. \end{aligned}$$

Théorème 9.

Soient $(E, \mathcal{M}, \varphi)$ un espace mesuré où toute partie d'un ensemble localement de mesure nulle est mesurable, L un relèvement sur $\mathcal{M}$ à majorant monotone, et $\mathcal{A}$ une partie de $\mathcal{M}$ telle que $\bigcup \mathcal{A} - \bigcup L(\mathcal{A}) \in \mathcal{N}_{loc}$.

- (1) Si $(E, \mathcal{M}, \varphi)$ coïncide avec son extension de CARATHEODORY ou si

$$\sup_{n \geq 1} \varphi(A_1 \cup \dots \cup A_n) < +\infty$$

$$A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$$

on a

$$\bigcup \mathcal{A} \in \mathcal{M} \text{ et } (\bigcup \mathcal{A}) \Delta [\bigcup L(\mathcal{A})] \in \mathcal{N}_{loc}$$

- (2) Si L est à majorant monotone borné, si $\mathcal{A}$ est presque filtrant supérieurement avec $\sup \varphi(\mathcal{A}) < +\infty$ et si $\bigcup \mathcal{A} - \bigcup L(\mathcal{A}) \in \mathcal{N}$, on a $\bigcup \mathcal{A} \in \mathcal{M}$ et $\varphi(\bigcup \mathcal{A}) = \sup \varphi(\mathcal{A})$.

Démonstration

(1) Soit $\mathcal{A}^*$ l'ensemble des réunions finies d'éléments de $\mathcal{A}$. Comme $\mathcal{A}^*$ est filtrant supérieurement, il résulte du théorème 8 que $\bigcup \mathcal{A} = \bigcup \mathcal{A}^* \in \mathcal{M}$ si $(E, \mathcal{M}, \varphi)$ coïncide avec son extension de CARATHEODORY.

Dans le second cas on a $\sup \varphi(\mathcal{A}^*) < +\infty$. D'après le lemme 4 il existe donc une suite croissante (B_n^*) de $\mathcal{A}^*$ telle que, si $B^* = \bigcup_n B_n^*$, on ait

$$\varphi(B^*) = \sup \varphi(\mathcal{A}^*) \quad \text{et} \quad A^* - B^* \in \mathcal{N} \quad \text{pour tout} \quad A^* \in \mathcal{A}^*$$

D'autre part, si L_0 est un majorant monotone de L , on a

$$N^* = \bigcup \mathcal{A}^* - \bigcup L_0(\mathcal{A}^*) \subset \bigcup \mathcal{A} - \bigcup L_0(\mathcal{A}) \subset \bigcup \mathcal{A} - \bigcup L(\mathcal{A})$$

d'où $N^* \in \mathcal{N}_{loc}$ d'après l'hypothèse faite sur $(E, \mathcal{M}, \varphi)$, et, pour la même raison, il résulte des inclusions

$$B^* - N^* \subset \bigcup \mathcal{A}^* - N^* = \bigcup \mathcal{A}^* \cap \bigcup L_0(\mathcal{A}^*) \subset \bigcup L_0(\mathcal{A}^*) \subset L_0(B^*)$$

que $\bigcup \mathcal{A} = \bigcup \mathcal{A}^* \in \mathcal{M}$. En particulier, $\bigcup L(\mathcal{A})$ et $\bigcup L_0(\mathcal{A}^*)$ sont mesurables et

$$L_0(\bigcup \mathcal{A}) \subset L_0[\bigcup L(\mathcal{A})] \subset L_0[\bigcup L_0(\mathcal{A}^*)] = L_0(\bigcup \mathcal{A}^*) = L_0(\bigcup \mathcal{A})$$

d'où

$$(\bigcup \mathcal{A}) \Delta [\bigcup L(\mathcal{A})] \in \mathcal{N}_{loc}.$$

La même démonstration est valable dans le premier cas puisqu'il résulte de la démonstration du théorème 8

$\{(2) \implies (3) \text{ appliquée à } \mathcal{A}^*\}$ que

$$([\bigcup L_0(\mathcal{A}^*)] \Delta [\bigcup \mathcal{A}^*]) \cap S \in \mathcal{N} \quad \text{pour tout} \quad S \in \mathcal{S}$$

d'où

$$[\bigcup L_0(\mathcal{A}^*)] \Delta (\bigcup \mathcal{A}^*) \in \mathcal{N}_{loc}$$

et par suite

$$L_0[\bigcup L_0(\mathcal{A}^*)] = L_0(\bigcup \mathcal{A}^*).$$

(2) Comme $\sup \varphi(\mathcal{A}^*) = \sup \varphi(\mathcal{A}) < +\infty$ (voir démonstration du théorème 8, $(3) \implies (4)$), ce qui précède s'applique et avec les mêmes notations on a encore

$$B^* - N^* \subset \cup \alpha^* - N^* = \cup \alpha - N^* \subset L_0(B^*) .$$

Alors, si L_0 est borné, il vient, compte tenu de $N^* \in \mathcal{N}$,

$$\varphi(\cup \alpha) = \varphi(B^*) = \sup \varphi(\alpha) .$$

A ce résultat correspond le suivant qui s'en déduit par la méthode utilisée pour établir le théorème 8'

Théorème 9'.

Soient $(E, \mathcal{M}, \varphi)$ un espace mesuré où toute partie d'un ensemble localement de mesure nulle est mesurable, L un relèvement sur L à minorant monotone et $\mathcal{A}$ une partie de $\mathcal{M}$ telle que
 $\cap L(\alpha) - \cap \alpha \in \mathcal{N}_{loc}$.

(1) Si $(E, \mathcal{M}, \varphi)$ coïncide avec son extension de CARATHEODORY ou si

$$\sup_{n \geq 1} \varphi \left[(A_1 \cap \dots \cap A_n) \right] < +\infty$$

$$A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$$

on a

$$\cap \alpha \in \mathcal{M} \text{ et } (\cap \alpha) \Delta [\cap L(\alpha)] \in \mathcal{N}_{loc}$$

(2) Si L a un minorant monotone dont l'associé est borné, si
est presque filtrant inférieurement avec
 $\sup \{ \varphi([A]) ; A \in \mathcal{A} \} < +\infty$ et si $\cap L(\alpha) - \cap \alpha \in \mathcal{N}$

on a

$$\cap \alpha \in \mathcal{M} \text{ et } \varphi(\cap \alpha) = \sup \{ \varphi([A]) ; A \in \mathcal{A} \} .$$

Le lemme suivant se démontre comme le lemme 4.

Lemme 4'.

Soient $(E, \mathcal{M}, \varphi)$ un espace mesuré et $\mathcal{A}$ une partie de $\mathcal{M}$
filtrante inférieurement pour l'inclusion telle que $\inf \varphi(\alpha) < +\infty$.

Alors il existe une suite décroissante (B_n) de $\mathcal{A}$ telle que,
si $B = \bigcap_n B_n$, on ait :

$$\varphi(B) = \inf \varphi(\alpha) \text{ et } B - A \in \mathcal{N} \text{ pour tout } A \in \mathcal{A} .$$

Théorème 10.

Soient $(E, \mathcal{M}, \varphi)$ un espace mesuré où la mesure φ est com-
plète, L un relèvement sur $\mathcal{M}$ à minorant monotone et $\mathcal{A}$ une
partie de $\mathcal{M}$ vérifiant

$$(j) \quad \cap L(\mathcal{A}) - \cap \mathcal{A} \subset N \in \mathcal{N}_{loc}$$

$$(jj) \quad \text{il existe } A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A} \text{ tels que } \varphi(A_1 \cap \dots \cap A_n) < +\infty$$

Alors

$$(1) \quad \cap \mathcal{A} \in \mathcal{M} \text{ et } (\cap \mathcal{A}) \Delta [\cap L(\mathcal{A})] \in \mathcal{N}_{loc}$$

$$(2) \quad \text{Si de plus } \mathcal{A} \text{ est presque filtrant inférieurement,} \\ \varphi(\cap \mathcal{A}) = \inf \varphi(\mathcal{A}).$$

Démonstration

(1) Soit $\mathcal{A}_*$ l'ensemble des intersections finies d'éléments de $\mathcal{A}$. Alors $\cap \mathcal{A}_* = \cap \mathcal{A}$ et $\cap L(\mathcal{A}_*) \subset \cap L(\mathcal{A})$ d'où, si L_0 est un minorant monotone de L ,

$$N_* = \cap L_0(\mathcal{A}_*) - \cap \mathcal{A}_* \subset \cap L(\mathcal{A}_*) - \cap \mathcal{A}_* \subset \cap L(\mathcal{A}) - \cap \mathcal{A} \subset N \in \mathcal{N}_{loc}$$

D'autre part, $\mathcal{A}_*$ est filtrant inférieurement et, par hypothèse, $\inf \varphi(\mathcal{A}_*) < +\infty$. Alors, d'après le lemme 4', il existe un B_* , intersection d'une suite décroissante de $\mathcal{A}_*$, tel que $B_* - A_* \in \mathcal{N}$ pour tout $A_* \in \mathcal{A}_*$, d'où $L_0(B_*) \subset \cap L_0(\mathcal{A}_*)$. Par suite

$$B_* \supset \cap \mathcal{A}_* \supset \cap L_0(\mathcal{A}_*) - N_* \supset L_0(B_*) - N.$$

Comme $B_* - [L_0(B_*) - N] \in \mathcal{N}$ et comme φ est complète, il vient $\cap \mathcal{A} = \cap \mathcal{A}_* \in \mathcal{M}$.

De ce résultat on déduit que $\cap L(\mathcal{A})$ et $\cap L_0(\mathcal{A})$ sont mesurables, et les relations

$$L_0(\cap \mathcal{A}) = L_0(\cap \mathcal{A}_*) = L_0[\cap L_0(\mathcal{A}_*)] \subset L_0[\cap L(\mathcal{A})] \subset L_0(\cap \mathcal{A})$$

entraînent

$$(\cap \mathcal{A}) \Delta [\cap L(\mathcal{A})] \in \mathcal{N}_{loc}$$

(2) Avec les notations ci-dessus il est immédiat que

$$\varphi(\cap \mathcal{A}) = \varphi(\cap \mathcal{A}_*) = \varphi(B_*) = \inf \varphi(\mathcal{A}_*) = \inf \varphi(\mathcal{A}).$$

On en déduit le résultat analogue suivant

Théorème 10'.

Soient $(E, \mathcal{M}, \varphi)$ un espace mesuré où la mesure φ est
complète, L un relèvement sur $\mathcal{M}$ à majorant monotone et $\mathcal{A}$ une
partie de $\mathcal{M}$ vérifiant

$$(j') \quad \bigcup \mathcal{A} - \bigcup L(\mathcal{A}) \subset N \in \mathcal{N}_{loc}$$

$$(jj') \quad \text{il existe } A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A} \text{ tels que}$$

$$\varphi[(A_1 \cup \dots \cup A_n)] < +\infty$$

Alors

- (1) $\bigcup \mathcal{A} \in \mathcal{M}$ et $(\bigcup \mathcal{A}) \Delta [\bigcup L(\mathcal{A})] \in \mathcal{N}_{loc}$
- (2) Si de plus $\mathcal{A}$ est filtrant supérieurement,
 $\varphi(\bigcup \mathcal{A}) = \inf \{ \varphi(A) ; A \in \mathcal{A} \}$

§ 2 - RELEVEMENTS LINEAIRES ET DENSITES.

En vue d'une application ultérieure, nous allons dans ce paragraphe nous placer dans un cadre plus général que le précédent.

Nous considérons un ensemble E , une algèbre $\mathcal{A}$ de parties de E (clan tel que $E \in \mathcal{A}$) et un idéal propre $\mathcal{J}$ de $\mathcal{A}$. En substituant $\mathcal{A}$ à $\mathcal{M}$ et $\mathcal{J}$ à $\mathcal{N}_{loc}$ dans la définition 1, on définit divers types de relèvements sur $\mathcal{A}$ par rapport à $\mathcal{J}$.

Définition 6.

Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de parties d'un ensemble E et $\mathcal{J}$ un idéal propre de $\mathcal{A}$.

On appellera pseudo-densité inférieure sur $\mathcal{A}$ par rapport à $\mathcal{J}$ toute application L de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{P}(E)$ telle que

- (a) $(A, B \in \mathcal{A}, A \Delta B \in \mathcal{J})$ entraîne $L(A) = L(B)$
- (b) $L(A \cap B) = L(A) \cap L(B)$ quels que soient $A, B \in \mathcal{A}$.

Une pseudo-densité inférieure L sera dite régulière si $L(\emptyset) = \emptyset$ et $L(E) = E$.

Remarquons que la propriété (b) entraîne de façon évidente la monotonie de L .

On désignera par Δ l'ensemble des pseudo-densités inférieures régulières sur $\mathcal{A}$ par rapport à $\mathcal{J}$, que l'on munira de l'ordre défini par

$L_1 \leq L_2$ si et seulement si $L_1(A) \subset L_2(A)$ pour tout $A \in \mathcal{A}$.

D'autre part on notera Φ l'ensemble des familles

$I = (\mathcal{J}_x)_{x \in E}$ où, pour chaque $x \in E$, $\mathcal{J}_x$ est un idéal propre de $\mathcal{A}$ contenant $\mathcal{J}$. On ordonne Φ par

$(\mathcal{J}_{1,x})_{x \in E} \leq (\mathcal{J}_{2,x})_{x \in E}$ si et seulement si $\mathcal{J}_{1,x} \subset \mathcal{J}_{2,x}$ pour tout $x \in E$.

On peut déjà noter que Φ n'est pas vide et possède un plus petit élément obtenu en prenant $\mathcal{J}_x = \mathcal{J}$ pour tout $x \in E$.

De même Δ n'est pas vide car

$$L(A) = \begin{cases} E & \text{si } [A \in \mathcal{J}] \\ \emptyset & \text{si } [A \notin \mathcal{J}] \end{cases}$$

Définit une pseudo-densité inférieure régulière sur $\mathcal{A}$ par rapport à $\mathcal{J}$, et il est clair qu'il s'agit du plus petit élément de Δ .

Plus généralement on a le résultat suivant

Théorème 11.

Les ensembles ordonnés $(\Delta, \leq)$ et $(\Phi, \leq)$ définis ci-dessus sont isomorphes.

Démonstration

On va définir une application γ de Δ dans Φ de la manière suivante : à $L \in \Delta$ on associe $\gamma(L) = (\mathcal{J}_{L,x})_{x \in E}$ où, pour chaque $x \in E$, on a posé

$$\mathcal{J}_{L,x} = \{A ; A \in \mathcal{A}, x \in L([A])\}.$$

$\mathcal{J}_{L,x}$ est un idéal de $\mathcal{A}$.

En effet, si $A, B \in \mathcal{J}_{L,x}$ il vient

$$x \in L([A] \cap [B]) = L([A \cap B]) = L[(A \cup B)]$$

d'où $A \cup B \in \mathcal{J}_{L,x}$. D'autre part, si $A \in \mathcal{A}$ et $B \in \mathcal{J}_{L,x}$, il vient, en utilisant la monotonie de L ,

$$x \in L([B]) \subset L[(A \cap B)]$$

d'où $A \cap B \in \mathcal{J}_{L,x}$.

Enfin il est immédiat que $\mathcal{J} \subset \mathcal{J}_{L,x}$ et $E \notin \mathcal{J}_{L,x}$, de sorte que $\gamma(L) \in \Phi$.

Montrons que γ est surjective.

Soit $I = (\mathcal{J}_x)_{x \in E} \in \Phi$. Pour chaque $A \in \mathcal{A}$ on pose

$$L_I(A) = \{x ; x \in E, [A \in \mathcal{J}_x]\}.$$

De cette façon, on définit une pseudo-densité inférieure régulière L_I sur $\mathcal{A}$ par rapport à $\mathcal{J}$. Il suffit de remarquer successivement que

1. $L_I(\emptyset) = \emptyset$ et $L_I(E) = E$
2. $(A, B \in \mathcal{A}, A \Delta B \in \mathcal{J})$ entraîne $[A \Delta [B \in \mathcal{J} \subset \mathcal{J}_x$
si bien que $[A \in \mathcal{J}_x$ équivaut à $[B \in \mathcal{J}_x$, d'où
 $L_I(A) = L_I(B)$.
3. $(A, B \in \mathcal{A}, A \subset B)$ entraîne $L_I(A) \subset L_I(B)$
4. Si $A, B \in \mathcal{A}$,
 $L_I(A) \cap L_I(B) = \{x; x \in E, [A \in \mathcal{J}_x, [B \in \mathcal{J}_x\}$
 $\subset \{x; x \in E, [A \cup [B \in \mathcal{J}_x\} = \{x; x \in E, [(A \cap B) \in \mathcal{J}_x\}$
 $= L_I(A \cap B)$,

d'où l'égalité à cause de la monotonie de L_I .

Donc $L_I \in \Delta$ et on a facilement $\gamma(L_I) = I$ puisque

$$\mathcal{J}_{L_I, x} = \{A; A \in \mathcal{A}, x \in L_I([A])\} = \{A; A \in \mathcal{A}, A \in \mathcal{J}_x\} = \mathcal{J}_x$$

Montrons que γ est injective.

Soient $L_1, L_2 \in \Delta$. Si $L_1 \neq L_2$, il existe $A_0 \in \mathcal{A}$ tel que $L_1([A_0]) \neq L_2([A_0])$, donc tel que, par exemple, $L_1([A_0]) - L_2([A_0]) \neq \emptyset$. Alors, si $x_0 \in L_1([A_0]) - L_2([A_0])$, il est clair que

$$A_0 \in \mathcal{J}_{L_I, x_0} - \mathcal{J}_{L_2, x_0}$$

d'où $\gamma(L_1) \neq \gamma(L_2)$.

Il en résulte que, avec la notation précédente, on a $\gamma^{-1}(I) = L_I$.

Enfin il est immédiat que

$$L_1 \leq L_2 \text{ entraîne } \gamma(L_1) \leq \gamma(L_2)$$

$$\text{et } I_1 \leq I_2 \text{ entraîne } L_{I_1} \leq L_{I_2}$$

de sorte que γ et γ^{-1} sont des applications croissantes.

On désigne maintenant par Δ_* l'ensemble des densités inférieures régulières sur $\mathcal{A}$ par rapport à $\mathcal{J}$, et par Φ_* l'ensemble des $(\mathcal{J}_x)_{x \in E} \in \Phi$ vérifiant la propriété suivante

$$(P) \quad \{x; x \in A, [A \notin \mathcal{J}_x\} \cup \{x; x \in [A, [A \in \mathcal{J}_x\} \in \mathcal{J}$$

pour tout $x \in E$.

Théorème 12

- (1) Les ensembles Δ_* et Φ_* sont conjointement vides ou non vides et, dans ce dernier cas, les ensembles ordonnés $(\Delta_*, \leq)$ et $(\Phi_*, \leq)$ sont isomorphes.
- (2) Si de plus l'idéal $\mathcal{J}$ de $\mathcal{A}$ est un idéal de $\mathcal{P}(E)$, Δ_* est une partie cofinale de Δ (donc Φ_* est une partie cofinale de Φ).

Démonstration

(1) Supposons $\Delta_* \neq \emptyset$. Alors $\gamma(\Delta_*) \subset \Phi_*$. Car si $L \in \Delta_*$ et si $\gamma(L) = (\bigcup_{L,x})_{x \in E}$ on a

$$\{x; x \in A, [A \notin \bigcup_x] \cup \{x; x \in [A, [A \in \bigcup_x] = L(A) \Delta A \in \mathcal{J}\}$$

pour tout $x \in E$.

D'autre part, si $I \in \Phi_*$, la pseudo-densité inférieure L_I considérée plus haut est même une densité inférieure à cause de la propriété (P).

Alors $(\Delta_*, \leq)$ et $(\Phi_*, \leq)$ qui se correspondent bijectivement par l'isomorphisme γ , sont isomorphes.

(2) Soit $L_0 \in \Delta_*$ et soit $L \in \Delta$ tel que $L_0 \leq L$. Alors, comme au § 1 (lemme 1, (6)), il est facile de voir que, pour tout $A \in \mathcal{A}$,

$$L_0(A) \subset L(A) \subset [L([A) \subset [L_0([A).$$

Comme $[L_0([A) - L_0(A) \in \mathcal{J}$ et puisque $\mathcal{J}$ est un idéal de $\mathcal{P}(E)$, il vient $L(A) \in \mathcal{A}$ et de plus, $L_0(A) \Delta A \in \mathcal{J}$ entraîne $L(A) \Delta A \in \mathcal{J}$. Donc $L \in \Delta_*$.

Corollaire 3.

On suppose encore que $\mathcal{J}$ est un idéal de $\mathcal{P}(E)$.

Si $L_0 \in \Delta_*$ n'est pas un relèvement linéaire, il existe $L \in \Delta_*$ tel que $L_0 < L$.

Démonstration

Comme L_0 est une densité inférieure, si L_0 coïncidait avec son associé L'_0 , L_0 serait un relèvement linéaire (lemme 1, (4)). Comme d'autre part $L_0(A) \cap L'_0([A) = \emptyset$ pour tout $A \in \mathcal{A}$, on peut affirmer l'existence d'un $A_0 \in \mathcal{A}$ tel

que

$$N_0 = E - [L_0(A_0) \cup L_0([A_0])] \neq \emptyset$$

Soit $x_0 \in N_0$. Avec les notations précédentes il est clair que

$$A_0 \notin J_{L_0, x_0} \quad \text{et} \quad [A_0] \notin J_{L_0, x_0}$$

de sorte qu'il existe un idéal propre de $\mathcal{A}$, J_{x_0} , tel que

$$J_{L_0, x_0} \subset J_{x_0} \quad \text{et} \quad [A_0] \in J_{x_0}.$$

Alors, si $I = (J_x)_{x \in E}$ avec $J_x = J_{L_0, x}$ si $x \neq x_0$, $L_I \in \Delta_*$ d'après le théorème 12, (2); et L_I majore strictement L_0 puisque $x_0 \in L_I(A_0) - L_0(A_0)$.

Théorème 13.

Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de parties d'un ensemble E et J un idéal propre de $\mathcal{A}$, également idéal de $\mathcal{P}(E)$.

Pour un relèvement L sur $\mathcal{A}$ par rapport à J les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (1) L est un relèvement linéaire régulier
- (2) L est une densité inférieure régulière maximale
- (3) L est une densité supérieure régulière minimale
- (4) $\gamma(L)$ est une famille d'idéaux maximaux.

Démonstration

(1) $\implies$ (2) car si L est un relèvement linéaire régulier et si $L_0 \in \Delta_*$ avec $L \leq L_0$, il vient

$$L \leq L_0 \leq L'_0 \leq L' = L$$

d'où $L = L_0$.

(2) $\implies$ (1) d'après le corollaire 3.

(1) $\iff$ (3) par dualité

(2) $\implies$ (4) d'après le théorème 12

(4) $\implies$ (2) car, par le théorème 11, L est un élément maximal de Δ donc un élément maximal de Δ_* puisque, par hypothèse, L est un relèvement.

Corollaire 4.

Dans les conditions du théorème 13, si $\Delta_* \neq \emptyset$, il existe sur $\mathcal{A}$ un relèvement linéaire régulier par rapport à $\mathcal{I}$.

Plus précisément, si $L \in \Delta_*$, il existe sur $\mathcal{A}$ un relèvement linéaire régulier L_0 par rapport à $\mathcal{I}$, tel que

$$L \leq L_0 \leq L'.$$

Démonstration

En utilisant l'axiome de ZORN, il est facile de voir soit directement, soit par l'existence d'idéaux maximaux, que si $L \in \Delta_*$, il existe dans Δ_* un élément maximal L_0 , donc un relèvement linéaire régulier d'après le théorème 13, tel que $L \leq L_0$. Il vient alors

$$L \leq L_0 = L'_0 \leq L'.$$

En rapprochant ce résultat du lemme 1, (4) et du théorème 6, (1) qui s'étend au cadre général de ce paragraphe de façon évidente (comme d'ailleurs les théorèmes 1 et 2), on obtient

Corollaire 5.

Dans les conditions du théorème 13, s'il existe sur $\mathcal{A}$ une densité inférieure (ou supérieure) par rapport à $\mathcal{I}$, il existe sur $\mathcal{A}$ un relèvement linéaire régulier par rapport à $\mathcal{I}$.

Le résultat du corollaire 4 est bien connu lorsque l'on travaille dans certains espaces mesurés, cas où il a été établi dans [16] par A. IONESCU TULCEA (voir aussi [19]). Ainsi, si l'on se replace dans le cadre du paragraphe précédent, il est vrai d'après [16] lorsque l'espace mesuré $(E, \mathcal{M}, \varphi)$ coïncide avec son extension de CARATHEODORY.

Mais on remarque déjà que, dans ce qui précède, il n'a jamais été utile de supposer que $\mathcal{A}$ était une tribu. D'autre part, la démonstration de A. IONESCU TULCEA s'appuie essentiellement sur la propriété suivante réalisée dans les conditions de [16] et [19] : si L est une densité inférieure régulière sur $\mathcal{M}$, par rapport

à $\mathcal{N}$, l'ensemble

$$\mathcal{C}_L = \{L(M) - N \ ; \ M \in \mathcal{M} \ , \ N \in \mathcal{N} \}$$

est une topologie sur E . Quant à la réalisation de cette propriété, elle est essentiellement liée à la validité de théorèmes de mesurabilité du type de ceux considérés au paragraphe précédent, en fait d'un cas particulier du théorème 9,(1) ; de sorte que, si l'on travaille dans un cadre où l'on ne dispose plus de ce théorème de mesurabilité la démonstration de [16] ne s'applique plus. On peut toutefois, comme l'a aussi remarqué S. GRAF, l'adapter en utilisant la topologie dont une base est l'ensemble $\mathcal{C}_L$ ci-dessus mais la démonstration ainsi obtenue est peu satisfaisante. Celle donnée ici, et qui a été inspirée par une démonstration de S. GRAF dans [12] évite toute considération de topologie et permet en particulier d'énoncer le résultat suivant.

Corollaire 6.

Soit $(E, \mathcal{M}, \varphi)$ un espace mesuré où toute partie d'un ensemble localement de mesure nulle est mesurable (resp. où la mesure φ est complète).

Alors si L est une densité inférieure régulière sur $\mathcal{M}$ par rapport à $\mathcal{N}_{loc}$ (resp. $\mathcal{N}$) il existe un relèvement linéaire régulier L_0 sur $\mathcal{M}$ par rapport à $\mathcal{N}_{loc}$ (resp. $\mathcal{N}$) tel que

$$L \leq L_0 \leq L' .$$

§ 3 - RELEVEMENTS D'ENSEMBLES AYANT LA PROPRIÉTÉ DE BAIRE

On rappelle qu'un espace topologique $(E, \mathcal{O})$ est dit espace de BAIRE si, $\mathcal{C}_1$ désignant l'ensemble des parties de E de première catégorie (maigres), on a $\mathcal{O} \cap \mathcal{C}_1 = \{\emptyset\}$. On dit qu'une partie B de E a la propriété de BAIRE si elle peut s'écrire $B = O \Delta N$ où $O \in \mathcal{O}$ et $N \in \mathcal{C}_1$. L'ensemble $\mathcal{B}$ de ces parties est une tribu et $\mathcal{C}_1$ est un idéal de $\mathcal{B}$ (voir [25]).

On s'intéressera à des relèvements sur $\mathcal{B}$ par rapport à $\mathcal{C}_1$.

Théorème 14.

Soient $(E, \mathcal{O})$ un espace de BAIRE et $\mathcal{B}$ la tribu des parties de E ayant la propriété de BAIRE.

- (1) Il existe sur $\mathcal{B}$, par rapport à $\mathcal{C}_1$, une densité supérieure α et une densité inférieure β , régulière, telles que

$$\beta(B) = \overline{\alpha(B)} \quad \text{et} \quad \alpha(B) = \overline{\beta(B)} \quad \text{pour tout } B \in \mathcal{B}$$
- (2) Le couple (α, β) de densités jouissant des propriétés ci-dessus est unique
- (3) $\alpha = \beta'$ (d'où $\beta = \alpha'$)

Démonstration

Considérons deux représentations $O_1 \Delta N_1$ et $O_2 \Delta N_2$ d'un même élément $B \in \mathcal{B}$, où $O_i \in \mathcal{O}$ et $N_i \in \mathcal{C}_1$ pour $i = 1, 2$. Comme $\overline{O} - O \in \mathcal{C}_1$ pour tout ouvert O , B admet aussi les représentations $\overline{O}_1 \Delta N'_1 = \overline{O}_2 \Delta N'_2$ où N'_1 et N'_2 sont encore des éléments de $\mathcal{C}_1$. Il en résulte

$$O_1 - \overline{O}_2 \in \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{O} = \{\emptyset\}$$

et par suite $\overline{O}_1 \subset \overline{O}_2$; d'où finalement $\overline{O}_1 = \overline{O}_2$ par symétrie.

Alors l'application α de $\mathcal{B}$ dans lui-même définie par $\alpha(B) = \overline{O}$ si $O \Delta N$ est une représentation quelconque de B avec $O \in \mathcal{O}$ et $N \in \mathcal{C}_1$, est un relèvement sur $\mathcal{B}$ par rapport à $\mathcal{C}_1$. C'est même une densité supérieure car si $B_1 = O_1 \Delta N_1$ et $B_2 = O_2 \Delta N_2$ où $O_i \in \mathcal{O}$ et $N_i \in \mathcal{C}_1$ pour $i = 1, 2$, il vient

$$B_1 \cup B_2 = (O_1 \cup O_2) \Delta N_3 \quad \text{où } N_3 \in \mathcal{C}_1$$

d'où

$$\alpha(B_1 \cup B_2) = \overline{O_1 \cup O_2} = \overline{O_1} \cup \overline{O_2} = \alpha(B_1) \cup \alpha(B_2)$$

D'autre part, si pour chaque $B \in \mathcal{B}$ on pose $\beta(B) = \overline{\alpha(B)}$, on définit encore un relèvement β sur $\mathcal{B}$ par rapport à $\mathcal{C}_1$ et c'est une densité supérieure. En effet, pour $B = O \Delta N \in \mathcal{B}$ avec $O \in \mathcal{O}$ et $N \in \mathcal{C}_1$ il vient :

$$\beta(B) = \overline{O} = \overline{O \cup N} = \overline{O \cup N} = \alpha(B) = \alpha'(B).$$

De plus, avec les mêmes notations, on a

$$\overline{\beta(B)} = \overline{\overline{\alpha(B)}} = \overline{\alpha(B)} = \alpha(B)$$

Comme il est clair que α et β sont des relèvements réguliers, les assertions (1) et (3) sont établies.

Enfin si (α_1, β_1) est un couple de densités possédant les propriétés (1), on a nécessairement pour tout $B \in \mathcal{B}$

$$\beta(B) = \overline{\alpha(B)} = \overline{\beta_1(B)} = \overline{\overline{\alpha_1(B)}} = \overline{\alpha_1(B)} = \beta_1(B)$$

d'où $\beta_1 = \beta$ et aussi $\alpha_1 = \alpha$.

Remarque

Le théorème 14 ci-dessus n'est en fait qu'une façon de présenter la propriété bien connue selon laquelle, dans chaque classe d'équivalence de $\mathcal{B}$ suivant $\mathcal{C}_1$, il existe un ouvert régulier (c'est-à-dire un ouvert égal à l'intérieur de son adhérence) et un seul, l'ensemble des ouverts réguliers étant stable par intersection (voir [24] et [25]).

En remarquant que $\mathcal{C}_1$ est un idéal de $\mathcal{P}(E)$, on peut alors appliquer le corollaire 4 et énoncer

Théorème 15. (S. GRAF)

Soient $(E, \mathcal{O})$ un espace de BAIRE et $\mathcal{B}$ la tribu des parties de E ayant la propriété de BAIRE.

Alors il existe sur $\mathcal{B}$, par rapport à l'idéal $\mathcal{C}_1$ des ensembles de première catégorie, un relèvement linéaire L tel que,
pour tout $B = 0 \Delta N \in \mathcal{B}$, avec $0 \in \mathcal{O}$ et $N \in \mathcal{C}_1$, on ait

$$\frac{0}{0} \subset L(B) \subset \overline{0}.$$

C'est exactement le résultat obtenu directement par S. GRAF dans [12] et dont la très habile démonstration est à l'origine de l'étude générale du paragraphe précédent. Signalons que l'existence d'un relèvement linéaire a également été obtenue récemment par G. MOKOBODZKI [à paraître] au moyen d'une démonstration différente utilisant l'hypothèse du continu. La recherche d'une démonstration autre que celle de A. IONESCU TULCEA dans [16] est imposée par l'impossibilité en général d'associer à une densité inférieure la topologie requise (voir paragraphe précédent). Cependant nous allons voir que ceci est possible lorsque l'espace de BAIRE considéré est séparable.

On s'appuie sur le résultat suivant à rapprocher du lemme 5 :

Lemme 6.

Soient $(E, \mathcal{O})$ un espace de BAIRE séparable, $\mathcal{B}$ la tribu des parties de E ayant la propriété de BAIRE et $\mathcal{A}$ une partie quelconque de $\mathcal{B}$.

Alors il existe un $B \in \mathcal{B}$, réunion d'une suite (A_n) de $\mathcal{A}$ et tel que

$$A - B \in \mathcal{C}_1 \text{ pour tout } A \in \mathcal{A}.$$

Démonstration

Ecrivons $\mathcal{A} = \{A_i ; i \in I\}$ et, pour chaque A_i , considérons une représentation $A_i = 0_i \Delta N_i$ où $0_i \in \mathcal{O}$ et $N_i \in \mathcal{C}_1$.

Posons $O = \bigcup_{i \in I} O_i$. Si D est une partie de E dénombrable et partout dense on écrit

$$D \cap O = \{x_n ; n \in \mathbb{N}\}.$$

Alors pour chaque $n \in \mathbb{N}$ il existe un $i_n \in I$ tel que $x_n \in O_{i_n}$ et il est immédiat que

$$\overline{O - \bigcup_n O_{i_n}} = \emptyset$$

d'où

$$O \subset \overline{\bigcup_n O_{i_n}}$$

Considérons l'ensemble B ayant la propriété de BAIRE défini par

$$B = \bigcup_n (O_{i_n} \Delta N_{i_n}) = (\bigcup_n O_{i_n}) \Delta N = \overline{\bigcup_n O_{i_n}} \Delta N' \text{ où } N, N' \in \mathcal{C}_1.$$

Alors, pour chaque $i \in I$, il vient

$$A_i - B = (O_i \Delta N_i) - (\overline{\bigcup_n O_{i_n}} \Delta N') = (O_i - \overline{\bigcup_n O_{i_n}}) \Delta N'' = N'' \in \mathcal{C}_1.$$

Une première conséquence est un théorème de recouvrement analogue au théorème 7 :

Théorème 16.

Soient $(E, \mathcal{O})$ un espace de Baire séparable, $\mathcal{B}$ la tribu des parties de E ayant la propriété de BAIRE, $\mathcal{L}$ un relèvement monotone sur $\mathcal{B}$, $\mathcal{A}$ une partie de $\mathcal{B}$ telle que $\bigcup \mathcal{A} - \bigcup \mathcal{L}(\mathcal{A}) \in \mathcal{C}_1$ et P une partie quelconque de E telle que $P - \bigcup \mathcal{A} \in \mathcal{C}_1$.

Alors il existe une suite (A_n) de $\mathcal{A}$ telle que
 $P - \bigcup_n A_n \in \mathcal{C}_1$.

Démonstration

D'après le lemme 6, il existe une suite (A_n) de $\mathcal{A}$ telle que, si $B = \bigcup_n A_n$, on ait $A - B \in \mathcal{C}_1$ d'où $\mathcal{L}(A) \subset \mathcal{L}(B)$ pour tout $A \in \mathcal{A}$ et par suite $\bigcup \mathcal{L}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{L}(B)$.

Le résultat s'obtient alors par les inclusions suivantes :

$$\begin{aligned} P - B &\subset (P - \bigcup \mathcal{A}) \cup [\bigcup \mathcal{A} - \mathcal{L}(B)] \cup [\mathcal{L}(B) - B] \\ &\subset (P - \bigcup \mathcal{A}) \cup [\bigcup \mathcal{A} - \bigcup \mathcal{L}(\mathcal{A})] \cup [\mathcal{L}(B) - B] \in \mathcal{C}_1. \end{aligned}$$

Le résultat suivant est à rapprocher des théorèmes 9,(1) et 9',(1).

Théorème 17.

Soient $(E, \mathcal{O})$ un espace de BAIRE séparable, $\mathcal{B}$ la tribu des parties de E ayant la propriété de BAIRE, L un relèvement sur $\mathcal{B}$ à majorant (resp. à minorant) monotone et α une partie de $\mathcal{B}$ telle que $U\alpha - UL(\alpha) \in \mathcal{C}_1$ (resp. $nL(\alpha) - n\alpha \in \mathcal{C}_1$).

Alors $U\alpha \in \mathcal{B}$ et $[U\alpha] \Delta [UL(\alpha)] \in \mathcal{C}_1$
(resp. $n\alpha \in \mathcal{B}$ et $[n\alpha] \Delta [nL(\alpha)] \in \mathcal{C}_1$).

Démonstration

Posons $N = U\alpha - UL(\alpha)$ et désignons par L_0 un majorant monotone de L . Alors, en considérant l'ensemble B du lemme 6 et en remarquant (voir démonstration du théorème 16) que $UL_0(\alpha) \subset L_0(B)$, il vient :

$$B - N \subset U\alpha - N = U\alpha \cap UL(\alpha) \subset UL(\alpha) \subset UL_0(\alpha) \subset L_0(B)$$

d'où il résulte immédiatement que

$$U\alpha \in \mathcal{B} \text{ et } [U\alpha] \Delta [UL(\alpha)] \in \mathcal{C}_1.$$

L'autre partie du théorème se déduit de celle-ci par considération du relèvement associé L' , comme dans la section 1.3.

Corollaire 7.

Soient $(E, \mathcal{O})$ un espace de BAIRE séparable, $\mathcal{B}$ la tribu des parties de E ayant la propriété de BAIRE et L une densité inférieure sur $\mathcal{B}$ par rapport à $\mathcal{C}_1$, telle que $L(E) = E$.

Alors les ensembles du type $L(A) - N$ où A parcourt $\mathcal{B}$ et N parcourt $\mathcal{C}_1$, sont exactement les ouverts pour une topologie définie sur E .

Démonstration

L étant une densité inférieure, la stabilité par intersections finies est immédiate.

Soit $\mathcal{A}$ un ensemble quelconque de parties du type considéré. Comme $L(A) - N \subset L(A) = L[L(A) - N]$ pour tout $A \in \mathcal{A}$, il vient $\bigcup \mathcal{A} - \bigcup L(\mathcal{A}) = \emptyset$ et, L étant en particulier monotone la démonstration du théorème 17 s'applique et il existe un $B \in \mathcal{B}$ tel que

$$B \subset \bigcup \mathcal{A} \subset L(B).$$

Il existe donc un $N \in \mathcal{C}_1$ tel que $\bigcup \mathcal{A} = L(B) - N$.

Il reste à remarquer que E et $\emptyset$ sont du type considéré.

Remarque

Si la densité inférieure considérée est la densité inférieure β du théorème 14, la topologie définie ci-dessus est plus fine que la topologie initiale car, si O est un ouvert pour cette topologie initiale, on a

$$O \subset \overset{\circ}{O} = \beta(O) \subset \overline{O}$$

et on utilise que $\overline{O} - O \in \mathcal{C}_1$.

Terminons par une remarque sur l'éventualité de l'existence d'une mesure de catégorie dans une espace topologique. Rappelons que l'on désigne ainsi toute mesure définie sur la tribu des ensembles ayant la propriété de BAIRE et pour laquelle les ensembles de mesure nulle seraient exactement les ensembles de première catégorie (voir [24] et [25]). Une telle mesure finie n'existe pas pour les espaces topologiques habituels, en particulier il n'en existe pas pour $\mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle. En effet, d'après J. C. OXToby dans [24], un espace de BAIRE métrisable sans point isolé n'admet aucune mesure de catégorie qui soit finie. Le cas des mesures de catégorie qui ne sont pas astreintes à être finies a été étudié par S. GRAF dans [12], qui a prouvé qu'un espace topologique séparable, quasi régulier au sens de [24] ou métrisable sans point isolé, n'admet d'autre mesure de catégorie que la mesure triviale nulle sur les ensembles de première catégorie et valant $+\infty$ ailleurs.

Par contre, si l'on s'intéresse non pas à des mesures au sens habituel, auxquelles on demande d'être σ -additives, mais à des mesures seulement additives, on obtient facilement le résultat suivant

Théorème 18.

Pour tout espace de BAIRE séparable, il existe une mesure de catégorie additive et finie.

Démonstration

Soient $(E, \mathcal{O})$ un espace de BAIRE séparable,
 $D = \{x_n ; n \in \mathbb{N}\}$ une partie de E dénombrable et partout
dense et $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs
telle que

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n < +\infty$$

De façon générale, pour $A \subset E$ on pose

$$N(A) = \{n ; n \in \mathbb{N} , x_n \in A\} .$$

Soient alors $\mathcal{B}$ la tribu des ensembles ayant la propriété de BAIRE, L le relèvement linéaire régulier sur $\mathcal{B}$ du théorème 15 et soit φ l'application de $\mathcal{B}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(B) = \begin{cases} \sum_{n \in N[L(B)]} a_n & \text{si } B \notin \mathcal{C}_1 \\ 0 & \text{si } B \in \mathcal{C}_1 \end{cases}$$

Remarquons que φ est bien définie ainsi car si $B \in \mathcal{B} - \mathcal{C}_1$, $\beta(B)$ est un ouvert non vide, donc $N[\beta(B)]$ n'est pas vide et, a fortiori, $N[L(B)]$ n'est pas vide puisque $\beta(B) \subset L(B)$.

La fonction φ est additive car, si $A, B \in \mathcal{B} - \mathcal{C}_1$ avec $A \cap B = \emptyset$ il vient, en utilisant que $L(\emptyset) = \emptyset$,

$$\begin{aligned} \varphi(A \cup B) &= \sum_{n \in N[L(A \cup B)]} a_n = \sum_{n \in N[L(A) \cup L(B)]} a_n \\ &= \sum_{n \in N[L(A)]} a_n + \sum_{n \in N[L(B)]} a_n \\ &= \varphi(A) + \varphi(B) \end{aligned}$$

la même conclusion étant évidemment valable si, par exemple, $A \in \mathcal{C}_1$. Ainsi φ est une mesure de catégorie additive et finie.

CHAPITRE II - DERIVATION

§ 1 - BASES DE DERIVATION FONCTIONNELLES DE VITALI

1.1. Notations et définitions

On reprend les notations introduites au chapitre I, §1. En général, pour l'espace mesuré $(E, \mathcal{M}, \varphi)$ considéré, la mesure φ ne sera supposée ni complète ni σ -finie.

On désigne par $\mathcal{M}^+$ l'ensemble des fonctions positives $\mathcal{M}$ -mesurables définies sur E , et par $\mathcal{L}_+^1$ le sous-ensemble des fonctions positives sommables d'intégrale strictement positive.

Pour toute fonction $h \in \overline{\mathbb{R}}^{+E}$ on pose

$$\int^* h \, d\varphi = \inf \left\{ \int f \, d\varphi ; f \in \mathcal{M}^+, f \geq h \right\}$$

$$\int^* h \, d\varphi = \sup \left\{ \int f \, d\varphi ; f \in \mathcal{M}^+, f \leq h \right\}$$

où $\int f \, d\varphi$ représente évidemment l'intégrale supérieure, éventuellement infinie, de f par rapport à φ , au sens de [5].

On introduit la généralisation suivante de la notation classique de base de dérivation, dite ensembliste, définie par R. de POSSEL dans [26] (voir aussi [14] et [15]).

Définition 7.

Soit $(E, \mathcal{M}, \varphi)$ un espace mesuré. On appelle

— base de dérivation fonctionnelle (généralisée) d'un point $x \in E$ tout ensemble non vide $\mathcal{I}(x)$ de familles filtrantes $\mathcal{B} = (f_i)_{i \in I}$ (I est un ensemble ordonné filtrant supérieurement qui ne dépend que de $\mathcal{B} \in \mathcal{I}(x)$), où f_i (constituant de $\mathcal{I}(x)$) appartient à $\mathcal{L}_+^1$, tel que toute sous-famille cofinale de $\mathcal{B} \in \mathcal{I}(x)$ appartienne encore à $\mathcal{I}(x)$;

— base de dérivation fonctionnelle (généralisée) dans $(E, \mathcal{M}, \varphi)$ toute famille $\mathcal{I} = (\mathcal{I}(x))_{x \in D}$, où D est une partie de E telle que $E - D \in \mathcal{N}_{loc}^*$ et où $\mathcal{I}(x)$ est une base de dérivation fonctionnelle de x .

Une base $\mathcal{D}' = (\mathcal{D}'(x))_{x \in D'}$, est une sous-base de la base ci-dessus si

$$\mathcal{D}'(x) \subset \mathcal{D}(x) \text{ pour tout } x \in D \cap D'.$$

Remarque

La notion de sous-base définie ci-dessus diffère de celle de [14].

Les définitions ci-dessus conduisent aux suivantes (voir [15])

Définition 8.

$\mathcal{D} = (\mathcal{D}(x))_{x \in D}$ étant une base de dérivation fonctionnelle dans l'espace mesuré $(E, \mathcal{M}, \varphi)$ et ψ étant une mesure (positive) sur $\mathcal{M}$, on appelle

— $\mathcal{D}$ -dérivée supérieure de ψ en $x \in D$ (par rapport à φ) l'élément de $\bar{\mathbb{R}}$

$$\bar{D}(\psi, \mathcal{D})(x) = \sup_{\mathcal{B} = (f_i)_{i \in I} \in \mathcal{D}(x)} \lim_{i \in I} \frac{\int f_i d\psi}{\int f_i d\varphi}$$

et de même

— -dérivée inférieure de ψ en $x \in D$ l'élément de $\bar{\mathbb{R}}$

$$\underline{D}(\psi, \mathcal{D})(x) = \inf_{\mathcal{B} = (f_i)_{i \in I} \in \mathcal{D}(x)} \lim_{i \in I} \frac{\int f_i d\psi}{\int f_i d\varphi}$$

Quand aucune confusion n'est à craindre nous écrivons simplement

$$\bar{D}\psi(x) \text{ et } \underline{D}\psi(x).$$

Nous adopterons la définition suivante de D. KÖLZOW dans [21]

(p. 3)

Définition 9.

Soient $(E, \mathcal{M}, \varphi)$ un espace mesuré et ψ une mesure sur $\mathcal{M}$. On dit qu'une fonction $f \in \mathcal{M}^+$ est une φ -dérivée de ψ si, pour tout $S \in \mathcal{G}$, on a

$$\int_S f d\varphi = \psi(S)$$

La mesure ψ est alors dite φ -dérivable.

Remarques

1. $\int_S f d\varphi$ représente encore l'intégrale supérieure au sens de [5] de $f \chi_S$ par rapport à φ (χ_S : fonction caractéristique de S).
2. Cette définition d'une φ -dérivée est plus large que celle contenue dans l'énoncé classique du théorème de RADON-NIKODYM tel qu'on le trouve par exemple chez P. R. HALMOS dans [13] et où l'on impose

$$\int_M f d\varphi = \psi(M) \quad \text{pour tout } M$$
3. Deux φ -dérivées d'une même mesure ψ sont égales localement presque partout ([21], lemme 3).

Définition 10.

Soient $(E, \mathcal{M}, \varphi)$ un espace mesuré, $\mathcal{D}$ une base de dérivation fonctionnelle dans $(E, \mathcal{M}, \varphi)$ et ψ une mesure sur $\mathcal{M}$ φ -dérivable.

On dit que la base $\mathcal{D}$ dérive la mesure ψ s'il existe une φ -dérivée f de ψ et un ensemble $N \in \mathcal{N}_{loc}^*$ en dehors duquel les φ -dérivées supérieure et inférieure de ψ sont définies et vérifient

$$\overline{D}(\psi, \mathcal{D})(x) = \underline{D}(\psi, \mathcal{D})(x) = f(x) \quad \text{pour tout } x \in E - N.$$

On remarque que toute base de dérivation ensembliste n'est qu'un cas particulier de base de dérivation fonctionnelle où les constituants de chaque $\mathcal{D}(x)$ sont des fonctions caractéristiques. Si l'on cherche maintenant à étendre aux bases fonctionnelles les notions connues de bases de dérivation (ensemblistes) de VITALI on est amené à poser les définitions suivantes.

Définition 11.

Soient $(E, \mathcal{M}, \varphi)$ un espace mesuré, $\mathcal{D} = (\mathcal{D}(x))_{x \in D}$ une base de dérivation fonctionnelle dans $(E, \mathcal{M}, \varphi)$ et $g \in \overline{\mathbb{R}}^{+E}$.

On dit qu'une partie $\mathcal{A}$ de $\mathcal{M}^+$ est un recouvrement $\mathcal{D}$ -fin de g s'il existe $N \in \mathcal{N}_{loc}^*$ tel que

$$(\text{supp } g) - N \subset D \quad (\text{supp } g = \{x ; x \in E, g(x) \neq 0\})$$

et tel que, pour tout $x \in (\text{supp } g) - N$, il existe une famille

$\mathcal{B} \in \mathcal{D}(x)$ dont tous les termes appartiennent à $\mathcal{A}$.

Définition 12.

Soient $(E, \mathcal{M}, \varphi)$ un espace mesuré et $g \in \bar{\mathbb{R}}^{+E}$.

On dit qu'une partie $\mathcal{A}$ de $\mathcal{M}^+$ est un

— recouvrement de VITALI très fort de g si, pour tout $h \in \bar{\mathbb{R}}^{+E}$ tel que $h \leq g$ et $0 < \int^* h d\varphi < +\infty$, il existe une

suite (f_n) de $\mathcal{A}$ vérifiant

$$(a) \int^* (h - \sup_n f_n)^+ d\varphi = 0$$

$$(b) \int_* (\sup_n f_n - h)^+ d\varphi = 0$$

$$(c) \inf(f_m, f_n) = 0 \quad \text{si } m \neq n$$

— recouvrement de VITALI fort (resp. faible*) de g si, dans les mêmes conditions que ci-dessus et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une suite (f_n) de $\mathcal{A}$ vérifiant

$$(a), (c) \text{ et } (b') \quad \int_* (\sup_n f_n - h)^+ d\varphi < \varepsilon$$

$$(\text{resp. } (a), (b') \text{ et } (c')) \quad \sum_n f_n d\varphi - \int \sup_n f_n d\varphi < \varepsilon$$

— recouvrement de VITALI faible de g si, dans les mêmes conditions que ci-dessus, il existe une suite (f_n) de $\mathcal{A}$ et une suite (λ_n) de réels strictement positifs vérifiant

$$(a'') \quad \int^* (h - \sum_n \lambda_n f_n)^+ d\varphi = 0$$

$$(b'') \quad \int_* (\sum_n \lambda_n f_n - h)^+ d\varphi < \varepsilon$$

Définition 13.

Une base de dérivation fonctionnelle $\mathcal{D}$ dans un espace mesuré $(E, \mathcal{M}, \varphi)$ est dite base de dérivation fonctionnelle de VITALI très forte (resp. forte, faible*, faible) si pour toute fonction $g \in \bar{\mathbb{R}}^{+E}$, tout recouvrement $\mathcal{D}$ -fin de g est un recouvrement de VITALI très fort (resp. fort, faible*, faible) de g .

Il est immédiat que toute base de VITALI très forte est une base de VITALI forte, une telle base étant, à son tour, une base de VITALI faible*.

1.2. Théorèmes de dérivation

Examinons d'abord le cas d'une base de VITALI très forte.

Théorème 19.

Soit $\mathcal{D} = \{\mathcal{I}(x)\}_{x \in D}$ une base de dérivation fonctionnelle
de VITALI très forte dans un espace mesuré $(E, \mathcal{M}, \varphi)$.

Alors $\mathcal{D}$ dérive toute mesure ψ sur $\mathcal{M}$ φ -dérivable.

Démonstration

Soit f une φ -dérivée de ψ .

Supposons qu'il existe un couple (β, γ) de réels tels
que $\beta < \gamma$ avec

$$A = \{f > \gamma\} \cap \{\underline{D}\psi < \beta\} \notin \mathcal{N}_{loc}^*.$$

Alors il existe un $S \in \mathcal{F}$ tel que

$$0 < \varphi^*(S \cap A) \leq \varphi(S) < +\infty.$$

Soit $B = S \cap A$ et soit $\overline{B} \in \mathcal{M}$ tel que

$$B \subset \overline{B} \subset \{f > \gamma\} \quad \text{et} \quad \varphi(\overline{B}) = \varphi^*(B)$$

Alors

$$\psi(\overline{B}) = \int_{\overline{B}} f \, d\varphi \geq \gamma \varphi(\overline{B}).$$

Posons maintenant

$$\mathcal{A} = \{g; g \in \mathcal{M}^+, \int g \, d\psi < \beta \int g \, d\varphi\}.$$

Comme $B \subset \{\underline{D}\psi < \beta\}$, $\mathcal{A}$ est un recouvrement $\mathcal{D}$ -fin de χ_B .

Alors par hypothèse sur $\mathcal{D}$, il existe une suite (f_n)
de $\mathcal{A}$ telle que

$$(a) \quad \int^* (\chi_B - \sup_n f_n)^+ d\varphi = \int (\chi_{\overline{B}} - \sup_n f_n)^+ d\varphi = 0$$

$$(b) \quad \int_* (\sup_n f_n - \chi_B)^+ d\varphi = \int (\sup_n f_n - \chi_{\overline{B}})^+ d\varphi = 0$$

$$(c) \quad \inf(f_m, f_n) = 0 \quad \text{pour } m \neq n.$$

De façon générale et en utilisant [21], lemme 3, on remar-

quera que, pour $h \in \mathcal{M}^+$ on a

$$\int h \, d\varphi = 0 \text{ implique } \int h \, d\psi = \int h \, f \, d\varphi = 0 .$$

D'autre part, à cause de la propriété (c), il est clair que

$$\sup_n f_n = \sup_n (f_1 + f_2 + \dots + f_n)$$

Alors, compte tenu de (a) , (b) , de l'égalité

$$\sup_n f_n = \chi_{\overline{B}} - (\chi_{\overline{B}} - \sup_n f_n)^+ + (\sup_n f_n - \chi_{\overline{B}})^+$$

et de la croissance de la suite $(f_1 + f_2 + \dots + f_n)$, il vient finalement

$$\begin{aligned} \psi(\overline{B}) &= \int \sup_n f_n \, d\psi = \int \sup_n (f_1 + f_2 + \dots + f_n) d\psi \\ &= \sup_n \int (f_1 + f_2 + \dots + f_n) d\psi = \sum_n \int f_n \, d\psi \\ &< \beta \sum_n \int f_n \, d\varphi = \beta \int \sup_n f_n \, d\varphi = \beta \, \psi(\overline{B}) \end{aligned}$$

ce qui contredit

$$\psi(\overline{B}) \geq \gamma \quad (\overline{B})$$

puisque $\beta < \gamma$ et $\psi(\overline{B}) < +\infty$.

De sorte que, quels que soient $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ avec $\beta < \gamma$ on a

$$\{f > \gamma\} \cap \{\underline{D}\psi < \beta\} \in \mathcal{N}_{loc}^*$$

et comme

$$\{\underline{D}\psi < f\} = \bigcup_{\substack{\beta, \gamma \in \mathbb{Q} \\ \beta < \gamma}} (\{f > \gamma\} \cap \{\underline{D}\psi < \beta\})$$

il vient

$$\{\underline{D}\psi < f\} \in \mathcal{N}_{loc}^*$$

On démontrerait de façon analogue que

$$\{\overline{D}\psi > f\} \in \mathcal{N}_{loc}^* .$$

Finalement, hors d'un ensemble $N \in \mathcal{N}_{loc}^*$, on a

$$\overline{D}\psi(x) \leq f(x) \leq \underline{D}\psi(x)$$

c'est-à-dire, puisque $\underline{D}\psi \leq \overline{D}\psi$,

$$\overline{D}\psi(x) = \underline{D}\psi(x) = f(x)$$

ce qui achève la démonstration.

Pour caractériser les bases de VITALI faibles nous aurons besoin des définitions suivantes.

Définition 14.

Soit $(E, \mathcal{M}, \varphi)$ un espace mesuré. Une mesure ψ sur $\mathcal{M}$ est dite

- φ -lipschitzienne s'il existe $c \in \mathbb{R}^+$ tel que

$$\psi(M) \leq c \varphi(M) \text{ pour tout } M \in \mathcal{M} ;$$
- localement φ -lipschitzienne si, pour tout $S \in \mathcal{S}$, il existe $c_S \in \mathbb{R}^+$ tel que

$$\psi(M) \leq c_S \varphi(M) \text{ pour tout } M \subset S, M \in \mathcal{M} .$$

Donnons un exemple d'une mesure localement φ -lipschitzienne mais non φ -lipschitzienne.

Considérons l'espace mesuré $(E, \mathcal{M}, \varphi)$ où $E = \mathbb{N}$, $\mathcal{M} = \mathcal{P}(E)$ et où φ est la mesure définie sur $\mathcal{M}$ par

$$\varphi(M) = \begin{cases} \text{card } M & \text{si } M \text{ est fini} \\ +\infty & \text{si } M \text{ est infini} \end{cases}$$

Soit ψ la mesure définie sur $\mathcal{M}$ par

$$\psi(M) = \begin{cases} \sum_{n \in M} n & \text{si } M \neq \emptyset \\ 0 & \text{si } M = \emptyset \end{cases}$$

Alors si $S \in \mathcal{S}$, c'est-à-dire si $S \subset \mathbb{N}$ est fini, il vient, pour tout $M \subset S$,

$$\psi(M) \leq \sup M \cdot \varphi(M) \leq \sup S \cdot \varphi(M)$$

de sorte que ψ est localement φ -lipschitzienne.

Mais ψ n'est pas φ -lipschitzienne car, quel que soit $c \in \mathbb{R}^+$, si $n \in \mathbb{N}$ est tel que $c < n$, on a

$$\psi(\{n\}) = n > c = c \varphi(\{n\}) .$$

En s'inspirant de la caractérisation des bases de dérivation ensemblistes de VITALI faibles par R. de POSSEL dans [26] et, plus précisément, de la présentation de cette question dans [14], on obtient, indépendamment de la note [27] de R. de POSSEL, le théorème d'équivalence suivant permettant de caractériser les bases de dérivation fonctionnelles de VITALI faibles.

Théorème 20.

Pour une base de dérivation fonctionnelle $\mathcal{D} = (\mathcal{D}(x))_{x \in D}$ dans un espace mesuré $(E, \mathcal{M}, \varphi)$, les conditions suivantes sont équivalentes :

- (1) $\mathcal{D}$ est une base de dérivation fonctionnelle de VITALI faible ;
- (2) Pour toute fonction $g \in \overline{\mathbb{R}}^{+E}$, toute fonction $h \in \overline{\mathbb{R}}^{+E}$ telle que $h \leq g$ et $0 < \int^* h d\varphi < +\infty$, tout $\varepsilon > 0$ et tout recouvrement $\mathcal{D}$ -fin, $\mathcal{A}$, de g , il existe une suite finie $(f_n)_{1 \leq n \leq m}$ de $\mathcal{A}$ et une suite finie $(\lambda_n)_{1 \leq n \leq m}$ de réels strictement positifs vérifiant

$$\int \left| \sum_{n=1}^m \lambda_n f_n - \bar{h} \right| d\varphi < \varepsilon$$

(où $\bar{h} \in \mathcal{M}^+$ est telle que $h \leq \bar{h}$ et $\int \bar{h} d\varphi = \int^* h d\varphi$) ;

- (3) Même propriété qu'en (2) avec $g = \chi_A$ (fonction caractéristique de A), $A \subset E$ et $h = \chi_B$, $B \subset A$, $0 < \varphi^*(B) < +\infty$;
- (4) $\mathcal{D}$ dérive toute mesure ψ sur $\mathcal{M}$, φ -dérivable et localement φ -lipschitzienne ;
- (5) $\mathcal{D}$ dérive toute mesure ψ sur $\mathcal{M}$, φ -dérivable et φ -lipschitzienne ;
- (6) Pour toute sous-base $\mathcal{D}'$ de $\mathcal{D}$ et tout $B \subset E$ vérifiant $0 < \varphi^*(B) < +\infty$, il existe $N \in \mathcal{N}^*$ tel que, pour tout $x \in B - N$, on ait

$$\underline{D}(\psi_B, \mathcal{D}')(x) = 1,$$

où ψ_B est la mesure sur $\mathcal{M}$ définie par $\psi_B(M) = \varphi^*(M \cap B)$;

- (7) Dans les mêmes conditions qu'en (6), il existe un $x \in B$ tel que $\underline{D}(\psi_B, \mathcal{D}')(x) = 1$;
- (8) Dans les mêmes conditions qu'en (6) et pour tout réel α , $0 < \alpha < 1$, il existe un $x \in B$, et un f , constituant de $\mathcal{D}'(x)$, tel que

$$\alpha \int f d\varphi < \int^* \chi_B f d\varphi ;$$

- (9) Pour tout $A \subset E$, tout $B \subset A$ tel que $0 < \varphi^*(B) < +\infty$, tout recouvrement $\mathcal{D}$ -fin, $\mathcal{A}$, de χ_A et tout réel α , $0 < \alpha < 1$, il existe un $f \in \mathcal{A}$ et un réel $\lambda > 0$ tels que

$$\alpha \int \lambda f d\varphi < \int^* \inf(\chi_B, \lambda f) d\varphi ;$$

- (10) Même propriété qu'en (9) où χ_A est remplacé par $g \in \overline{\mathbb{R}}^{+E}$ et χ_B par $h \in \overline{\mathbb{R}}^{+E}$, $h \leq g$, $0 < \int^* h d\varphi < +\infty$.

Démonstration

Les implications (2) $\implies$ (3) et (4) $\implies$ (5) sont triviales.

(1) $\implies$ (2)

$\mathcal{D}$ étant une base faible, dans les conditions indiquées en (2) il existe une suite (f_n) de $\mathcal{A}$ et une suite (λ_n) de réels strictement positifs telles que

$$\int^* (h - \sum_n \lambda_n f_n)^+ d\varphi = 0$$

$$\text{et} : \int_* (\sum_n \lambda_n f_n - h)^+ d\varphi < \epsilon$$

c'est-à-dire encore, en utilisant la fonction $\bar{h}$ définie en (2) telles que

$$\int (\bar{h} - \sum_n \lambda_n f_n)^+ d\varphi = 0 \quad \text{et} \quad \int (\sum_n \lambda_n f_n - \bar{h})^+ d\varphi < \epsilon$$

$$\text{d'où} \quad \int |\bar{h} - \sum_n \lambda_n f_n| d\varphi < \epsilon.$$

Comme la suite des fonctions $u_m = |\bar{h} - \sum_{n=1}^m \lambda_n f_n|$ converge point par point vers $|\bar{h} - \sum_n \lambda_n f_n|$ et comme

$$\begin{aligned} u_m &= (\bar{h} - \sum_{n=1}^m \lambda_n f_n)^+ + (\sum_{n=1}^m \lambda_n f_n - \bar{h})^+ \\ &\leq \bar{h} + (\sum_n \lambda_n f_n - \bar{h})^+, \end{aligned}$$

la suite (u_m) est dominée par une fonction sommable.

Alors, d'après le théorème de LEBESGUE, on a

$$\lim_m \int u_m d\varphi = \int |\bar{h} - \sum_n \lambda_n f_n| d\varphi$$

et par conséquent il existe m tel que

$$\int u_m d\varphi < \epsilon.$$

(3) $\implies$ (4)

Cette démonstration est, dans son principe, analogue à celle du théorème 19. Nous considérons encore f une φ -dérivée de ψ et nous supposons qu'il existe un couple de réels (β, γ) tels que $\beta < \gamma$ avec

$$A = \{f > \gamma\} \cap \{\underline{D}\psi < \beta\} \notin \mathcal{N}_{loc}^*$$

Comme précédemment on trouve alors un $B \subset A$ et un $\bar{B} \in \mathcal{M}$ tels que

$B \subset \overline{B} \subset \{f > \gamma\}$ et $0 < \varphi(\overline{B}) = \varphi^*(B) < +\infty$
avec

$$\psi(\overline{B}) = \int_{\overline{B}} f \, d\varphi \geq \gamma \varphi(\overline{B}) .$$

Puis on considère le recouvrement $\mathcal{D}$ -fin, $\mathcal{A}$, de χ_B .

Alors, par hypothèse et pour tout entier $k \geq 1$, il existe des suites finies $(f_n^k)_{1 \leq n \leq m_k}$ de $\mathcal{A}$ et $(\lambda_n^k)_{1 \leq n \leq m_k}$ de réels strictement positifs telles que

$$\int \left| \sum_{n=1}^{m_k} \lambda_n^k f_n^k - \chi_B \right| d\varphi < \frac{1}{k}$$

Comme l'intégrale ci-dessus majore

$$\left| \int \left(\sum_{n=1}^{m_k} \lambda_n^k f_n^k \right) d\varphi - \varphi(\overline{B}) \right|$$

il vient

$$\lim_k \int \left(\sum_{n=1}^{m_k} \lambda_n^k f_n^k \right) d\varphi = \varphi(\overline{B}) .$$

De façon analogue, et en utilisant que la mesure ψ est localement φ -lipschitzienne, on obtient

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\overline{B}} \left(\sum_{n=1}^{m_k} \lambda_n^k f_n^k \right) d\psi - \psi(\overline{B}) \right| \leq \int_{\overline{B}} \left| \sum_{n=1}^{m_k} \lambda_n^k f_n^k - \chi_B \right| d\psi \\ & \leq C_{\overline{B}} \int_{\overline{B}} \left| \sum_{n=1}^{m_k} \lambda_n^k f_n^k - \chi_B \right| d\varphi < \frac{C_{\overline{B}}}{k} , \end{aligned}$$

d'où

$$\lim_k \int_{\overline{B}} \left(\sum_{n=1}^{m_k} \lambda_n^k f_n^k \right) d\psi = \psi(\overline{B}) .$$

Or, puisque chaque fonction f_n^k appartient à $\mathcal{A}$, on a

$$\begin{aligned} \int_{\overline{B}} \left(\sum_{n=1}^{m_k} \lambda_n^k f_n^k \right) d\psi & \leq \int \left(\sum_{n=1}^{m_k} \lambda_n^k f_n^k \right) d\psi \\ & = \sum_{n=1}^{m_k} \lambda_n^k \int f_n^k d\psi < \beta \sum_{n=1}^{m_k} \lambda_n^k \int f_n^k d\varphi \\ & = \beta \int \left(\sum_{n=1}^{m_k} \lambda_n^k f_n^k \right) d\varphi , \end{aligned}$$

d'où, en prenant la limite suivant k ,

$$\psi(\overline{B}) \leq \beta \varphi(\overline{B})$$

ce qui est incompatible avec

$$\psi(\overline{B}) \geq \gamma(\overline{B}), \quad \beta < \gamma \quad \text{et} \quad 0 < \varphi(\overline{B}) < +\infty.$$

Il en résulte que $A \in \mathcal{N}_{loc}^*$ et on conclut comme pour le théorème 19.

(5) $\implies$ (6)

Il est d'abord classique que ψ_B est une mesure sur (voir [13] p. 46). De plus, pour tout $M \in \mathcal{M}$,

$$\psi_B(M) = \varphi^*(M \cap B) \leq \varphi(M)$$

et ψ_B est donc une mesure φ -lipschitzienne.

D'autre part, soit $\overline{B} \in \mathcal{M}$ tel que $B \subset \overline{B}$ et $\varphi(\overline{B}) = \varphi^*(B)$. Alors pour tout $M \in \mathcal{M}$, il vient, compte tenu de $\varphi^*(B) < +\infty$,

$$\psi_B(M) = \varphi^*(B \cap M) = \varphi(\overline{B} \cap M) = \int_M \chi_{\overline{B}} d\varphi,$$

de sorte que $\chi_{\overline{B}}$ est une φ -dérivée de ψ_B .

Alors, par hypothèse, la base $\mathcal{D}$ dérive ψ_B , c'est-à-dire qu'il existe $N \in \mathcal{N}_{loc}^*$ hors duquel les $\mathcal{D}$ -dérivées inférieure et supérieure de ψ_B existent et vérifient

$$\underline{D}(\psi_B, \mathcal{D}) = \overline{D}(\psi_B, \mathcal{D}) = \chi_{\overline{B}}$$

Si bien que, pour tout $x \in B - N$, on a

$$\underline{D}(\psi_B, \mathcal{D})(x) = \overline{D}(\psi_B, \mathcal{D})(x) = 1$$

Enfin, il résulte des définitions que, pour toute sous-base $\mathcal{D}'$ de $\mathcal{D}$ et pour tout $x \in B - N$, on a les relations $1 = \underline{D}(\psi_B, \mathcal{D})(x) \leq \underline{D}(\psi_B, \mathcal{D}')(x) \leq \overline{D}(\psi_B, \mathcal{D}')(x) \leq \overline{D}(\psi_B, \mathcal{D})(x) = 1$ d'où

$$\underline{D}(\psi_B, \mathcal{D}')(x) = 1.$$

(6) $\implies$ (7)

C'est évident quand on a remarqué que $0 < \varphi^*(B) < +\infty$ joint à $N \in \mathcal{N}_{loc}^*$ entraînent $B - N \neq \emptyset$. En effet, en utilisant l'ensemble $\overline{B}$ défini ci-dessus et l'inégalité $\varphi^*(B) < +\infty$, on a

$$\varphi^*(B \cap N) \leq \varphi^*(\overline{B} \cap N) = 0$$

d'après la définition de $\mathcal{N}_{loc}^*$. Donc $\varphi^*(B \cap N) = 0$ et,

puisque $\varphi^*(B) > 0$, B ne peut être inclus dans N .

(7) $\implies$ (8)

Soit $x \in B$ tel que $\underline{D}(\psi_B, \mathcal{D}') = 1$. Il résulte alors de la définition de la dérivée inférieure que, si $\mathcal{B} = (f_i)_{i \in I}$ appartient à $\mathcal{D}'(x)$, on a

$$\lim_{i \in I} \frac{\int f_i d\psi_B}{\int f_i d\varphi} \geq 1 > \alpha.$$

Il existe donc un $i \in I$ tel que $f = f_i$ vérifie

$$\alpha \int f d\varphi < \int f d\psi_B.$$

Remarquons au passage que ceci est une conséquence faible de ce qui précède et que, en fait, toute famille $\mathcal{B} \in \mathcal{D}(x)$ possède une sous famille terminale $\mathcal{B}'$ telle que

$$\alpha \int f d\varphi < \int f d\psi_B \quad \text{pour tout } f \in \mathcal{B}'.$$

Comme, avec des notations utilisées plus haut, $\chi_{\overline{B}}$ est une φ -dérivée de ψ_B , on a :

$$\int f d\psi_B = \int \chi_{\overline{B}} f d\varphi = \int^* \chi_B f d\varphi,$$

d'où le résultat.

(8) $\implies$ (9)

$\mathcal{A}$ étant un recouvrement $\mathcal{D}$ -fin de χ_A , il existe $N \in \mathcal{N}_{loc}^*$ tel que, à chaque $x \in A - N$, on puisse associer un $\mathcal{B}_x \in \mathcal{D}(x)$ dont les termes appartiennent à $\mathcal{A}$.

Alors $\mathcal{D}' = (\mathcal{D}'(x))_{x \in D-N}$ où

$$\mathcal{D}'(x) = \begin{cases} \mathcal{D}(x) & \text{si } x \in (D - N) - A \\ \{\mathcal{B}'_x; \mathcal{B}'_x \text{ sous-famille cofinale de } \mathcal{B}_x\} & \text{si } x \in A - N \end{cases}$$

est une sous-base de $\mathcal{D}$.

Par hypothèse, il existe donc un $x \in B$ et un f constituant de $\mathcal{D}'(x)$, donc élément de $\mathcal{B}'_x$, donc appartenant à $\mathcal{A}$ tel que

$$\alpha \int f d\varphi < \int^* \chi_B f d\varphi = \int \chi_{\overline{B}} f d\varphi$$

où $\overline{B}$ est défini comme plus haut.

D'autre part, la suite des fonctions $f_n = \inf (n \chi_B, f)$ est croissante et converge partout vers $\chi_B f$ de sorte que, par le théorème de LEVI,

$$\lim_n \int f_n d\varphi = \int \chi_B f d\varphi$$

Il existe donc $n \geq 1$ tel que

$$\alpha \int f d\varphi < \int \inf (n \chi_B, f) d\varphi$$

soit encore

$$\alpha \int \frac{1}{n} f d\varphi < \int \inf(\chi_B, \frac{1}{n} f) d\varphi = \int^* \inf(\chi_B, \frac{1}{n} f) d\varphi$$

et il suffit de prendre $\lambda = \frac{1}{n}$.

(9) $\implies$ (10)

Soit $\bar{h} \in \mathcal{M}^+$ telle que $h \leq \bar{h}$ et $\int^* h d\varphi = \int \bar{h} d\varphi$. On a donc $0 < \int \bar{h} d\varphi < +\infty$ et par suite il existe $\delta > 0$ et $M \in \mathcal{M}$ avec $0 < \varphi(M) < +\infty$ tels que $M \subset \{\bar{h} > \delta\}$. Alors, si $B = M \cap \{h > \delta\}$, on a $\varphi^*(B) = \varphi(M)$. C'est immédiat car si $P \in \mathcal{M}$ avec $P \subset M - B$, il est nécessaire que $\varphi(P) = 0$ sinon on doit avoir à la fois

$$\int^* h \chi_P d\varphi \leq \delta \varphi(P)$$

par définition de l'intégrale supérieure et

$$\int^* h \chi_P d\varphi = \int_P \bar{h} d\varphi > \delta \varphi(P)$$

puisque $P \subset \{\bar{h} > \delta\}$, ce qui est contradictoire.

Ainsi il existe $B \subset E$ vérifiant $0 < \varphi^*(B) < +\infty$, et $\delta > 0$, tels que $\delta \chi_B \leq h$, soit encore $\chi_B \leq \frac{1}{\delta} h$. Comme $\mathcal{A}$, recouvrement $\mathcal{D}$ -fin de g , est aussi un recouvrement $\mathcal{D}$ -fin de χ_B , pour tout réel α , $0 < \alpha < 1$, il existe un $f \in \mathcal{A}$ et un réel λ strictement positif tels que

$$\alpha \int \lambda f d\varphi < \int^* \inf(\chi_B, \lambda f) d\varphi \leq \int^* \inf(\frac{1}{\delta} h, \lambda f) d\varphi$$

d'où

$$\alpha \int (\lambda \delta) f d\varphi < \int^* \inf(h, (\lambda \delta) f) d\varphi.$$

(10) $\implies$ (1)

Soit $\mathcal{A}$ un recouvrement $\mathcal{D}$ -fin de g . Il faut montrer que pour toute fonction positive $h \leq g$ telle que $0 < \int^* h d\varphi < +\infty$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe des suites

(f_n) de $\mathcal{A}$ et (λ_n) de $\mathbb{R}^{*+}$ telles que

$$(a') \quad \int^* (h - \sum_n \lambda_n f_n)^+ d\varphi = 0$$

$$(b') \quad \int_* (\sum_n \lambda_n f_n - h)^+ d\varphi < \varepsilon .$$

Soient donc h comme ci-dessus, ε' tel que $0 < \varepsilon' < \varepsilon$ et

$$\alpha = \frac{\int^* h d\varphi}{\int^* h d\varphi + \varepsilon'} .$$

Pour tout fonction positive h' telle que $h' \leq g$ et $\int^* h' d\varphi < +\infty$ on pose

$\mathcal{A}(h') = \{(\lambda, f) ; (\lambda, f) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathcal{A}, \alpha \int \lambda f d\varphi < \int^* \inf(h', \lambda f) d\varphi\}$ et

$$S(h') = \begin{cases} \sup \{ \lambda \int f d\varphi ; (\lambda, f) \in \mathcal{A}(h') \} & \text{si } \mathcal{A}(h') \neq \emptyset \\ 0 & \text{si } \mathcal{A}(h') = \emptyset \end{cases}$$

Alors

$$(i) \quad h'' \leq h' \implies S(h'') \leq S(h') \quad (\text{évident})$$

$$(ii) \quad S(h') = 0 \iff \int^* h' d\varphi = 0, \text{ d'après (10).}$$

Donc on a $S(h) > 0$ et si $0 < \beta < 1$ il existe un couple $(\lambda_0, f_0) \in \mathcal{A}(h)$ tel que $\lambda_0 \int f_0 d\varphi > \beta S(h)$.

$$\text{Soit } h_1 = (h - \lambda_0 f_0)^+ .$$

$$\text{1^{er} cas : } \int^* h_1 d\varphi = 0 .$$

Les deux suites finies à un seul élément, (f_0) et (λ_0) possèdent alors les propriétés désirées. C'est évident pour la propriété (a''). Etablissons (b'').

Comme

$$h = \inf(h, \lambda_0 f_0) + (h - \lambda_0 f_0)^+$$

il vient, en tenant compte de (a''),

$$\begin{aligned} \int^* \inf(h, \lambda_0 f_0) d\varphi &\leq \int^* h d\varphi \leq \int^* \inf(h, \lambda_0 f_0) d\varphi + \int^* (h - \lambda_0 f_0)^+ d\varphi \\ &= \int^* \inf(h, \lambda_0 f_0) d\varphi \end{aligned}$$

D'où

$$\int^* \inf(h, \lambda_0 f_0) d\varphi = \int^* h d\varphi .$$

Puisque $(\lambda_0, f_0) \in \mathcal{H}(h)$, il vient

$$\alpha \int \lambda_0 f_0 d\varphi < \int^* \inf(h, \lambda_0 f_0) d\varphi = \int^* h d\varphi$$

D'où

$$\int \lambda_0 f_0 d\varphi - \int^* h d\varphi < \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) \int^* h d\varphi = \varepsilon' < \varepsilon.$$

Il suffit alors de remarquer que, si la fonction mesurable $\bar{h}$ possède par rapport à h les propriétés habituelles ($\bar{h} \geq h$, $\int \bar{h} d\varphi = \int^* h d\varphi$), et puisque

$$(\lambda_0 f_0 - \bar{h})^+ = \lambda_0 f_0 - \inf(\lambda_0 f_0, \bar{h}),$$

on a

$$\begin{aligned} \int^* (\lambda_0 f_0 - h)^+ d\varphi &= \int (\lambda_0 f_0 - h)^+ d\varphi = \int \lambda_0 f_0 d\varphi - \int \inf(\lambda_0 f_0, \bar{h}) d\varphi \\ &= \int \lambda_0 f_0 d\varphi - \int^* h d\varphi < \varepsilon. \end{aligned}$$

2^{ème} cas : $\int^* h_1 d\varphi > 0$.

Comme d'autre part $\int^* h_1 d\varphi < \int^* h d\varphi < +\infty$, on peut traiter h_1 comme h .

Ainsi s'amorce une récurrence que nous allons maintenant préciser.

Supposons obtenus les couples $(\lambda_v, f_v) \in \mathcal{H}(h_v)$,

$0 \leq v \leq n$, où $h_0 = h$ et

$$h_v = (h_{v-1} - \lambda_{v-1} f_{v-1})^+ = (h_0 - \sigma_{v-1})^+ \text{ pour } 1 \leq v \leq n+1$$

avec

$$\sigma_v = \lambda_0 f_0 + \dots + \lambda_v f_v \text{ pour } 0 \leq v \leq n$$

et d'autre part

$$\beta S(h_v) < \int h_v f_v d\varphi \text{ pour } 0 \leq v \leq n$$

Remarquons que

$$\begin{aligned} \alpha \sum_{v=0}^n \int \lambda_v f_v d\varphi &< \sum_{v=0}^n \int^* \inf(h_v, \lambda_v f_v) d\varphi = \int^* \sum_{v=0}^n \inf(h_v, \lambda_v f_v) d\varphi \\ &\leq \int^* h d\varphi. \end{aligned}$$

La première inégalité est due à $(\lambda_v, f_v) \in \mathcal{H}(h_v)$ pour $0 \leq v \leq n$. La seconde s'obtient en notant que

$$h_{v-1} = h_v + \inf(h_{v-1}, \lambda_{v-1} f_{v-1}) \text{ pour } 1 \leq v \leq n+1$$

d'où, par addition,

$$h = h_0 = \sum_{v=0}^n \inf (h_v, \lambda_v f_v) + h_{n+1}$$

et par suite l'inégalité annoncée.

1^{er} cas : $\int^* h_{n+1} d\varphi = 0$.

Alors les deux suites finies $(f_v)_{0 \leq v \leq n}$ de $\mathcal{F}$ et $(\lambda_v)_{0 \leq v \leq n}$ de $\mathbb{R}^{**+}$ possèdent les propriétés voulues. C'est évident pour (a') puisque $h_{n+1} = (h - \sigma_n)^+$. Pour (b'') on fait une démonstration analogue à celle donnée plus haut pour $n = 0$.

D'abord les inégalités

$$\begin{aligned} \int^* \inf(h, \sum_{v=0}^n \lambda_v f_v) d\varphi &\leq \int^* h d\varphi \\ &\leq \int^* \inf(h, \sum_{v=0}^n \lambda_v f_v) d\varphi + \int^* (h - \sum_{v=0}^n \lambda_v f_v)^+ d\varphi \\ &= \int^* \inf(h, \sum_{v=0}^n \lambda_v f_v) d\varphi \end{aligned}$$

montrent que

$$\int^* \inf(h, \sum_{v=0}^n \lambda_v f_v) d\varphi = \int^* h d\varphi.$$

Ensuite, la remarque précédente permet d'écrire

$$\int \sum_{v=0}^n \lambda_v f_v d\varphi - \int^* h d\varphi < (\frac{1}{\alpha} - 1) \int^* h d\varphi = \varepsilon' < \varepsilon.$$

D'où finalement

$$\begin{aligned} \int_* (\sum_{v=0}^n \lambda_v f_v - h)^+ d\varphi &= \int (\sum_{v=0}^n \lambda_v f_v - \bar{h})^+ d\varphi \\ &= \int \sum_{v=0}^n \lambda_v f_v d\varphi - \int \inf(\sum_{v=0}^n \lambda_v f_v, \bar{h}) d\varphi \\ &= \int \sum_{v=0}^n \lambda_v f_v d\varphi - \int^* h d\varphi < \varepsilon. \end{aligned}$$

2^{ème} cas : $\int^* h_{n+1} d\varphi > 0$.

On poursuit la construction.

Le seul cas restant à examiner est donc celui où cette construction peut se poursuivre indéfiniment, c'est-à-dire où $\int^* h_n d\varphi > 0$ pour $n = 0, 1, 2, \dots$

On vient de voir que, pour tout n ,

$$\sum_{v=0}^n \int \lambda_v f_v d\varphi - \int^* h d\varphi < \varepsilon'$$

d'où

$$\sum_{v=0}^n \int \lambda_v f_v d\varphi < \varepsilon' + \int^* h d\varphi < +\infty$$

Il en résulte

$$\lim_n \int \lambda_n f_n d\varphi = 0$$

et comme $0 < \beta S(h_n) < \int \lambda_n f_n d\varphi$ il vient

$$\lim_n S(h_n) = 0$$

Soit alors $\sigma = \lim_n \sigma_n$ et $\tilde{h} = (h - \sigma)^+$

Pour tout n , on a,

$$\tilde{h} \leq (h - \sigma_n)^+ = h_{n+1}$$

d'où

$$S(\tilde{h}) \leq S(h_{n+1})$$

et par suite $S(\tilde{h}) = 0$, ce qui, on le sait, équivaut à $\int^* \tilde{h} d\varphi = 0$, c'est-à-dire

$$\int^* (h - \sum_n \lambda_n f_n)^+ d\varphi = 0.$$

La propriété (a'') est donc vérifiée pour les suites (infinies) (f_n) de $\mathcal{F}$ et (λ_n) de $\mathbb{R}^{**}$.

Pour la propriété (b'') on montre comme précédemment que

$$\int \inf(\sum_n \lambda_n f_n, \bar{h}) d\varphi = \int^* \inf(\sum_n \lambda_n f_n, h) d\varphi = \int^* h d\varphi$$

d'où

$$\begin{aligned} \int_{\star} (\sum_n \lambda_n f_n - \bar{h})^+ d\varphi &= \int (\sum_n \lambda_n f_n - \bar{h})^+ d\varphi \\ &= \int \sum_n \lambda_n f_n d\varphi - \int \inf(\sum_n \lambda_n f_n, \bar{h}) d\varphi \\ &= \int \sum_n \lambda_n f_n d\varphi - \int^* h d\varphi \leq \varepsilon' < \varepsilon. \end{aligned}$$

Remarques

1. Le résultat ci-dessus est à rapprocher du théorème I de R. de POSSEL dans [27] qui, sous une forme légèrement différente, affirme l'équivalence des propriétés (3), (5) et (9). La notion de base de dérivation (fonctionnelle) de VITALI faible correspond donc à celle de système faiblement dérivant chez D. de POSSEL.
2. On pourrait aussi, comme l'a fait R. de POSSEL dans le théorème cité ci-dessus, adjoindre aux propriétés équivalentes du théorème 20 la propriété suivante : $\mathcal{D}$ dérive toute mesure vectorielle ψ sur $\mathcal{M}$, à valeurs dans un espace de BANACH, φ -dérivable et localement φ -lipschitzienne (pour tout $S \in \mathcal{S}$, il existe $c_S \in \mathbb{R}^+$ tel que $\|\psi(M)\| \leq c_S \varphi(M)$ pour tout ensemble mesurable $M \subset S$).
3. L'énoncé de la propriété (8) diffère de l'énoncé correspondant figurant dans [14], p. 213, sous le nom de théorème de densité locale à cause de la notion différente de sous-base utilisée dans cet ouvrage où l'on exige seulement $D' - B \in \mathcal{N}_{loc}^*$ et non $E - D' \in \mathcal{N}_{loc}^*$, ce qui permet de remplacer dans (8) "il existe un $x \in B$ et un f constituant de $\mathcal{D}'(x)$ " par "il existe un f constituant de $\mathcal{D}'$ ".
4. Dans le cas particulier où l'espace mesuré $(E, \mathcal{M}, \varphi)$ coïncide avec son extension de CARATHEODORY, la mention " φ -dérivable" dans l'énoncé des propriétés (4) et (5) est superflue. En effet, par le théorème 4 et le théorème 23 ci-dessous, on sait que l'existence dans $(E, \mathcal{M}, \varphi)$ d'une base de dérivation fonctionnelle de VITALI faible entraîne celle d'une décomposition de cet espace. Alors, d'après D. KÖLZOW ([21], théorème 1), le théorème de RADON-NIKODYM est valable et en particulier toute mesure ψ (localement) φ -lipschitzienne est φ -dérivable.

Le résultat suivant va permettre de voir le rapport qui existe entre les bases de dérivation fonctionnelles de VITALI faibles* et faibles.

Théorème 21.

Soit $\mathcal{D}$ une base de dérivation fonctionnelle de VITALI faible*
dans un espace mesuré $(E, \mathcal{M}, \varphi)$.

Alors pour toute fonction $g \in \bar{\mathbb{R}}^{+E}$, toute fonction $h \in \bar{\mathbb{R}}^{+E}$
telle que $h \leq g$ et $0 < \int^* h d\varphi < +\infty$, tout recouvrement $\mathcal{D}$ -fin,
 $\mathcal{A}$, de g et tout réel α tel que $0 < \alpha < 1$, il existe $f \in \mathcal{A}$
vérifiant

$$\alpha \int f d\varphi < \int^* \inf(h, f) d\varphi .$$

Démonstration

Soient $g \in \bar{\mathbb{R}}^{+E}$ et $h \in \bar{\mathbb{R}}^{+E}$ telle que $h \leq g$ et
 $0 < \int^* h d\varphi < +\infty$. On utilisera encore une fonction mesurable
 $\bar{h}$ telle que $h \leq \bar{h}$ et $\int \bar{h} d\varphi = \int^* h d\varphi$.

Etant donné un réel α tel que $0 < \alpha < 1$, on pose

$$\varepsilon = (\alpha^{-1} - 1) \int^+ h d\varphi > 0$$

Alors, si $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}^+$ est un recouvrement $\mathcal{D}$ -fin de g , il
existe par hypothèse une suite (f_n) de $\mathcal{A}$ telle que

$$(a) \quad \int^* (h - \sup_n f_n)^+ d\varphi = \int (\bar{h} - \sup_n f_n)^+ d\varphi = 0$$

$$(b') \quad \int_* (\sup_n f_n - h)^+ d\varphi = \int (\sup_n f_n - \bar{h})^+ d\varphi < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$(c') \quad \sum_n \int f_n d\varphi - \int \sup_n f_n d\varphi < \frac{\varepsilon}{2}$$

Des égalités

$$\bar{h} = (\bar{h} - \sup_n f_n)^+ + \inf(\bar{h}, \sup_n f_n) ,$$

$$\sup_n f_n = \bar{h} - (\bar{h} - \sup_n f_n)^+ + (\sup_n f_n - \bar{h})^+ ,$$

il résulte d'après (a)

$$\int^* h d\varphi = \int^* \inf(h, \sup_n f_n) d\varphi$$

et d'après (a) et (b')

$$\begin{aligned} \int \sup_n f_n d\varphi &= \int^* h d\varphi + \int_* (\sup_n f_n - \bar{h})^+ d\varphi \\ &< \int^* h d\varphi + \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

En rapprochant ce dernier résultat de (c'), on obtient

$$\sum_n \int f_n d\varphi < \int^* h d\varphi + \epsilon$$

Il en résulte

$$\begin{aligned} \sum_n \alpha \int f_n d\varphi &< \alpha \int^* h d\varphi + \alpha \epsilon \\ &= \alpha \int^* h d\varphi + (1 - \alpha) \int^* h d\varphi \\ &= \int^* h d\varphi = \int^* \inf(h, \sup_n f_n) d\varphi \end{aligned}$$

Remarquons alors que

$$\inf(h, \sup_n f_n) = \sup_n \inf(h, f_n)$$

En effet, si $x \in E$ est tel que

$$\sup_n f_n(x) \leq h(x)$$

il vient

$$\inf(h(x), f_n(x)) = f_n(x) \text{ pour tout } n$$

d'où

$$\sup_n \inf(h(x), f_n(x)) = \sup_n f_n(x) = (\inf h(x), \sup_n f_n(x))$$

et dans le cas où $x \in E$ est tel que

$$h(x) < \sup_n f_n(x)$$

il existe un n_0 tel que

$$\inf(h(x), f_{n_0}(x)) = h(x)$$

d'où

$$h(x) \leq \sup_n \inf(h(x), f_n(x))$$

et comme il est évident que

$$\sup_n \inf(h, f_n) \leq \inf(h, \sup_n f_n)$$

on a dans ce cas

$$\sup_n \inf(h(x), f_n(x)) = h(x) = \inf(h(x), \sup_n f_n(x))$$

d'où l'égalité annoncée.

Il en résulte

$$\begin{aligned} \sum_n \alpha \int f_n d\varphi &< \int^* \sup_n \inf(h, f_n) d\varphi \\ &\leq \int^* \sum_n \inf(h, f_n) d\varphi \\ &\leq \sum_n \int^* \inf(h, f_n) d\varphi \end{aligned}$$

Par suite, on est assuré qu'il existe un n tel que

$$\alpha \int f_n d\varphi < \int^* \inf(h, f_n) d\varphi$$

et le théorème est démontré.

De ce théorème 21 et du théorème 20, (9), il résulte aussitôt

Corollaire 8.

Dans un espace mesuré $(E, \mathcal{M}, \varphi)$ toute base de dérivation fonctionnelle de VITALI faible* est de VITALI faible.

Corollaire 9.

Dans un espace mesuré $(E, \mathcal{M}, \varphi)$ il y a coïncidence entre les notions de base de dérivation ensembliste de VITALI faible* et de VITALI faible.

Démonstration

Soit $\mathcal{D}$ une base de dérivation ensembliste dans $(E, \mathcal{M}, \varphi)$, c'est-à-dire que les constituants sont des fonctions catactéristiques.

Si $\mathcal{D}$ est une base de VITALI faible*, c'est une base de VITALI faible au sens de la définition 13 d'après le corollaire 8. Alors, par le théorème 20, (5), $\mathcal{D}$ dérive toute mesure ψ sur $\mathcal{M}$ φ -lipschitzienne et, par conséquent, est une base de VITALI faible au sens classique d'après [26] ou [14]. Et comme il est évident qu'une telle base est une base de VITALI faible*, le corollaire est établi.

1.3. Existence de bases de dérivation fonctionnelles de VITALI

On peut énoncer le théorème suivant analogue à un résultat classique dans le cas des bases ensemblistes.

Théorème 22.

Dans un espace mesuré $(E, \mathcal{M}, \varphi)$ où toute partie d'un ensemble localement de mesure nulle est mesurable, à toute base de dérivation fonctionnelle de VITALI faible $\mathcal{D}$ on peut associer une densité inférieure.

Démonstration

Remarquons que l'hypothèse faite sur $(E, \mathcal{M}, \varphi)$ entraîne que φ est complète, d'où $\mathcal{N}_{loc}^* = \mathcal{N}_{loc}$.

Pour tout $M \in \mathcal{M}$ on pose

$$L_{\mathcal{D}}(M) = \{x ; x \in E, \underline{D}(\varphi_M, \mathcal{D}) = 1\}$$

et on définit ainsi une densité inférieure régulière $L_{\mathcal{D}}$ sur $\mathcal{M}$.

D'abord, d'après le théorème 20, (6), il existe $N \in \mathcal{N}_{loc}$ tel que

$$M - N = M \cap L_{\mathcal{D}}(M)$$

d'où

$$M - L_{\mathcal{D}}(M) \in \mathcal{N}_{loc}.$$

D'autre part

$$L_{\mathcal{D}}(M) - M \subset \{\bar{D}(\varphi_M, \mathcal{D}) > \frac{2}{3}\} \cap \{x_M < \frac{1}{3}\} \in \mathcal{N}_{loc}$$

d'après la démonstration du théorème 20, (3) $\implies$ (4), d'où finalement

$$L_{\mathcal{D}}(M) \Delta M \in \mathcal{N}_{loc}$$

ce qui prouve aussi que $L_{\mathcal{D}}(M) \in \mathcal{M}$.

Soient maintenant $M_1, M_2 \in \mathcal{M}$ tels que $M_1 \Delta M_2 \in \mathcal{N}_{loc}$. Alors pour tout $S \in \mathcal{G}$ on a

$$\varphi_{M_1}(S) = \varphi(M_1 \cap S) = \varphi(M_2 \cap S) = \varphi_{M_2}(S)$$

d'où, en remarquant que

$$\int f d\varphi_{M_i} = \int_{M_i} f d\varphi \quad \text{pour } i = 1, 2$$

et en passant par l'intermédiaire de fonctions étagées
il vient

$$\int f d\varphi_{M_1} = \int f d\varphi_{M_2} \quad \text{pour tout } f \in \mathcal{L}^1 \cap \mathcal{M}^+$$

d'où

$$\underline{D}(\varphi_{M_1}, \mathcal{D})(x) = \underline{D}(\varphi_{M_2}, \mathcal{D})(x) \quad \text{pour tout } x \in D$$

où D est le domaine de définition de $\mathcal{D}$.

Il en résulte

$$L_{\mathcal{D}}(M_1) = L_{\mathcal{D}}(M_2).$$

Enfin, pour tout $S \in \mathcal{S}$ on a, si $M_1, M_2 \in \mathcal{M}$

$$\varphi_{M_1}(S) + \varphi_{M_2}(S) \leq \varphi_{M_1 \cap M_2}(S) + \varphi(S)$$

d'où, en passant encore par l'intermédiaire de fonctions étagées

$$\int f d\varphi_{M_1} + \int f d\varphi_{M_2} \leq \int f d\varphi_{M_1 \cap M_2} + \int f d\varphi$$

pour tout $f \in \mathcal{L}^1 \cap \mathcal{M}^+$ et, en particulier, pour $f \in \mathcal{L}_+^1$,
il vient

$$\frac{\int f d\varphi_{M_1} + \int f d\varphi_{M_2}}{\int f d\varphi} \leq 1 + \frac{\int f d\varphi_{M_1 \cap M_2}}{\int f d\varphi}$$

d'où, pour tout $x \in D$,

$$\underline{D}(\varphi_{M_1}, \mathcal{D})(x) + \underline{D}(\varphi_{M_2}, \mathcal{D})(x)$$

$$\leq \inf_{\mathcal{B} = (f_i)_{i \in I} \in \mathcal{D}(x)} \lim_{i \in I} \frac{\int f_i d\varphi_{M_1} + \int f_i d\varphi_{M_2}}{\int f_i d\varphi}$$

$$\leq 1 + \underline{D}(\varphi_{M_1 \cap M_2}, \mathcal{D})(x) \leq 2$$

de sorte que

$$L_{\mathcal{D}}(M_1) \cap L_{\mathcal{D}}(M_2) \subset L_{\mathcal{D}}(M_1 \cap M_2)$$

et, la monotonie de $L_{\mathcal{D}}$ étant évidente, on a le résultat désiré.

Il en résulte que l'on peut compléter le théorème d'équivalence de D. KÖLZOW dans [21] ainsi que le théorème 4 de la manière suivante

Théorème 23.

Pour un espace mesuré $(E, \mathcal{M}, \varphi)$ coïncidant avec son extension de CARATHEODORY les conditions suivantes sont équivalentes

- (1) Il existe sur $\mathcal{M}$ un relèvement linéaire
- (2) Il existe dans $(E, \mathcal{M}, \varphi)$ une base de dérivation fonctionnelle de VITALI très forte
- (3) Il existe dans $(E, \mathcal{M}, \varphi)$ une base de dérivation fonctionnelle de VITALI faible

Démonstration

- $(1) \implies (2)$ résulte de la démonstration de D. KÖLZOW si l'on remarque que la base de dérivation ensembliste de VITALI construite par cet auteur est très forte.
- $(2) \implies (3)$ résulte trivialement des théorèmes 19 et 20.
- $(3) \implies (1)$ s'obtient en combinant le théorème 22 et le corollaire 4.

§ 2 - DERIVATION FONCTIONNELLE GLOBALE DANS UN GROUPE TOPOLOGIQUE LOCALE- MENT COMPACT

2.1. Notations

De façon générale, les notations utilisées dans ce paragraphe sont, pour une large part, celles de P. COURREGE dans [5].

Par espace mesuré nous entendrons tout triplet $(E, \mathcal{B}, \mu)$ constitué d'un ensemble E , d'un σ -clan $\mathcal{B}$ de parties de E (et non tribu comme c'était toujours le cas précédemment) et d'une mesure positive μ sur $\mathcal{B}$.

Nous désignerons par $\mathcal{B}^\mu$ le σ -clan complété de $\mathcal{B}$ par rapport à μ .

L'ensemble des fonctions numériques définies sur E et $\mathcal{B}$ -mesurables sera noté $\mathcal{M}(E, \mathcal{B})$.

Soit $(E, \mathcal{O}_E)$ un espace topologique localement compact.

On désigne par

- $\mathcal{K}_E$ l'ensemble des compacts de E ,
- $\mathcal{K}_{\mathcal{O}_E}$ le sous-ensemble des compacts G_δ ,
- $\mathcal{B}_E$ la tribu des boréliens de E , engendrée par $\mathcal{O}_E$,
- $\mathcal{B}_E^k$ le σ -clan des boréliens σ -bornés, engendré par $\mathcal{K}_E$,
- $\mathcal{B}_E^{k_0}$ le σ -clan des ensembles de BAIRE, engendré par $\mathcal{K}_{\mathcal{O}_E}$.

Rappelons au passage que $\mathcal{B}_E^{k_0} \cap \mathcal{K}_E = \mathcal{K}_{\mathcal{O}_E}$ (voir [13]).

Si μ désigne une mesure de RADON positive sur E , on rappelle que l'ensemble des fonctions μ -intégrables est $\mathcal{L}^1(E, \mathcal{B}_E^\mu, \mu)$, tandis que les ensembles μ -mesurables au sens de BOURBAKI dans [3] sont les éléments de la tribu

$$\begin{aligned} \Lambda_E^\mu &= \{A ; A \subset E, A \cap K \in \mathcal{B}_E^\mu \quad \forall K \in \mathcal{K}_E\} \\ &= \{A ; A \subset E, A \cap B \in (\mathcal{B}_E^k)^\mu \quad \forall B \in (\mathcal{B}_E^k)^\mu\} \end{aligned}$$

et les fonctions μ -mesurables au sens de BOURBAKI les éléments de $\mathcal{M}(E, \Lambda_E^\mu)$.

Enfin, la mesure de RADON μ est "completion regular" au sens de P.R. HALMOS dans [13] si

$$\mathcal{B}_E^k \subset (\mathcal{B}_E^{k_0})^\mu.$$

Si E est un groupe topologique localement compact, toute mesure de HAAR sur E est "completion regular" (voir [13]).

2.2. Quelques résultats de mesurabilité

Nous nous intéresserons à la situation suivante.

Soient E (resp. F) un espace localement compact et λ (resp. μ) une mesure de RADON positive sur E (resp. F). On considère la mesure de RADON produit $\lambda \otimes \mu$ sur $E \times F$ et on désigne par f un homéomorphisme de $E \times F$ sur lui-même.

Alors il est clair que

$$f(\mathcal{B}_{E \times F}^k) = \mathcal{B}_{E \times F}^k$$

mais on ne peut rien dire a priori de

$$f[(\mathcal{B}_{E \times F}^k)^{\lambda \otimes \mu}]$$

En effet, si $N \in \mathcal{B}_{E \times F}^k$ avec $(\lambda \otimes \mu)(N) = 0$, toute partie A de N est telle que $A \in (\mathcal{B}_{E \times F}^k)^{\lambda \otimes \mu}$ mais, comme on sait seulement que $f(A) \subset f(N)$, on ne peut rien conclure en général sur $f(A)$ sauf toutefois si l'on sait que $f(N)$ est de $(\lambda \otimes \mu)$ -mesure nulle et c'est justement cette situation favorable que nous allons exploiter dans ce qui suit.

Nous commencerons par un résultat très général.

Lemme 7.

Soient $(E, \mathcal{B}, \mu)$ un espace mesuré et f une application de E dans lui-même telle que $f(\mathcal{B}) \subset \mathcal{B}$ et

$$(N \in \mathcal{B}, \mu(N) = 0) \text{ implique } \mu[f(N)] = 0$$

Alors $f(\mathcal{B}^\mu) \subset \mathcal{B}^\mu$.

Démonstration

Si $B \in \mathcal{B}^\mu$ on a

$$B = B_1 \cup P \quad \text{avec} \quad B_1 \in \mathcal{B}$$

$$\text{et} \quad P \subset N \in \mathcal{B} \quad \text{avec} \quad \mu(N) = 0.$$

Il en résulte

$$f(B) = f(B_1) \cup f(P) \quad \text{où} \quad f(B_1) \in \mathcal{B}$$

$$\text{et} \quad f(P) \subset f(N) \in \mathcal{B} \quad \text{avec} \quad \mu[f(N)] = 0$$

si bien que $f(B) \in \mathcal{B}^\mu$.

Nous aurons encore besoin du résultat suivant de nature purement topologique.

Lemme 8.

Soient E et F deux espaces localement compacts et
 $K \in \mathcal{K}_{E \times F}$, $U \in \mathcal{O}_{E \times F}$ tels que $K \subset U$.

Alors il existe une suite finie d'ensembles disjoints du type
 $A_j \times B_j$, $1 \leq j \leq p$, où A_j (resp. B_j) est différence de deux
éléments de $\mathcal{K}_{O_E}$ (resp. $\mathcal{K}_{O_F}$) , telle que

$$K \subset \bigcup_{j=1}^p (A_j \times B_j) \subset U.$$

Démonstration

L'ensemble K étant compact, il existe une suite finie d'ouverts

$$(U_i \times V_i)_{1 \leq i \leq n} \quad \text{où} \quad (U_i, V_i) \in \mathcal{O}_E \times \mathcal{O}_F \quad \text{pour} \quad i = 1, \dots, n$$

telle que

$$K \subset \bigcup_{i=1}^n U_i \times V_i \subset U.$$

Il résulte alors de [13], §50, théorème A, qu'il existe des compacts $K_i \in \mathcal{K}_{E \times F}$, $1 \leq i \leq n$, tels que

$$K = \bigcup_{i=1}^n K_i \quad \text{et} \quad K_i \subset U_i \times V_i \quad \text{pour} \quad i = 1, \dots, n.$$

Par suite, il existe pour chaque i un compact

$$C_i \times D_i \quad \text{où} \quad (C_i, D_i) \in \mathcal{K}_E \times \mathcal{K}_F$$

tel que

$$K_i \subset C_i \times D_i \subset U_i \times V_i$$

et, d'après [13], § 50, théorème D, on peut même affirmer qu'il existe pour chaque i un compact

$$C_{O_i} \times D_{O_i} \quad \text{où} \quad (C_{O_i}, D_{O_i}) \in \mathcal{K}_{O_E} \times \mathcal{K}_{O_F}$$

tel que

$$K_i \subset C_i \times D_i \subset C_{0i} \times D_{0i} \subset U_i \times V_i$$

d'où

$$K \subset \bigcup_{i=1}^n (C_{0i} \times D_{0i}) \subset U.$$

Alors si l'on pose $\mathcal{N} = \{1, 2, \dots, n\}$ et si à tout $I \subset \mathcal{N}$ on associe

$$A_I = \bigcap_{i \in I} C_{0i} - \bigcup_{i \in \mathcal{N} - I} C_{0i}$$

les A_I ainsi définis sont différences de deux éléments de $\mathcal{K}_{0E}$, ils sont disjoints et de plus

$$\bigcup_{I \subset \mathcal{N}} A_I = \bigcup_{i=1}^n C_{0i}.$$

En appelant B_J les ensembles obtenus de façon analogue à partir des D_{0i} , on voit que les ensembles $A_I \times B_J$ pour $I, J \subset \mathcal{N}$ sont du type désiré et que

$$\bigcup_{I, J \subset \mathcal{N}} (A_I \times B_J) = \bigcup_{i=1}^n (C_{0i} \times D_{0i})$$

d'où le résultat.

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème de mesurabilité suivant

Théorème 24.

Soient E et F deux espaces localement compacts munis respectivement des mesures de RADON positives λ et μ , et soit f un homéomorphisme de $E \times F$ sur lui-même possédant la propriété suivante :

pour tout compact $K \in \mathcal{K}_{E \times F}$ tel que $(\lambda \otimes \mu)(K) = 0$ il existe un voisinage W_K de K et des mesures de RADON positives λ_K et μ_K de bases λ et μ respectivement telles que

$$(\lambda \otimes \mu)[f(A \times B)] \leq (\lambda_K \otimes \mu_K)(A \times B)$$

chaque fois que $A \times B \subset W_K$ avec A (resp. B) différences de deux éléments $\mathcal{K}_{0E}$ (resp. $\mathcal{K}_{0F}$).

Alors, l'inclusion $f(\xi) = \xi$ est réalisée dans chacun des cas suivants :

$$\xi = (\mathcal{B}_{E \times F}^{k_0})^\lambda \otimes \mu, \quad \xi = (\mathcal{B}_{E \times F}^k)^\lambda \otimes \mu, \quad \xi = \Lambda_{E \times F}^\lambda \otimes \mu.$$

Démonstration

Soit $K \in \mathcal{K}_{E \times F}$ tel que $(\lambda \otimes \mu)(K) = 0$ et soit un réel $\varepsilon > 0$.

Comme on a aussi $(\lambda_K \otimes \mu_K)(K) = 0$, il existe un voisinage ouvert U' de K tel que

$$(\lambda_K \otimes \mu_K)(U') < \varepsilon.$$

Posons $U = U' \cap W_K$. D'après le lemme 8 il existe alors un nombre fini de $A_j \times B_j$, soit $1 \leq j \leq p$, disjoints, avec A_j (resp. B_j) différence de deux éléments de $\mathcal{K}_{O_E}$ (resp. $\mathcal{K}_{O_F}$) et tels que

$$K \subset \bigcup_{j=1}^p (A_j \times B_j) \subset U \subset U'.$$

Il en résulte

$$\begin{aligned} (\lambda \otimes \mu)[f(K)] &\leq (\lambda \otimes \mu)\left(f\left[\bigcup_{j=1}^p (A_j \times B_j)\right]\right) \\ &= (\lambda \otimes \mu)\left[\bigcup_{j=1}^p f(A_j \times B_j)\right] = \sum_{j=1}^p (\lambda \otimes \mu)[f(A_j \times B_j)] \\ &\leq \sum_{j=1}^p (\lambda_K \otimes \mu_K)(A_j \times B_j) = (\lambda_K \otimes \mu_K)\left[\bigcup_{j=1}^p (A_j \times B_j)\right] \\ &\leq (\lambda_K \otimes \mu_K)(U') < \varepsilon, \end{aligned}$$

et ceci ayant lieu quel que soit $\varepsilon > 0$, il vient

$$(\lambda \otimes \mu)[f(K)] = 0 \text{ pour tout } K \in \mathcal{K}_{E \times F}.$$

Soit maintenant $N \in \mathcal{B}_{E \times F}^k$ tel que $(\lambda \otimes \mu)(N) = 0$. Alors, en utilisant que f est un homéomorphisme il vient

$$\begin{aligned} (\lambda \otimes \mu)[f(N)] &= \sup_{\substack{K \in \mathcal{K}_{E \times F} \\ K \subset f(N)}} (\lambda \otimes \mu)(K) \\ &= \sup_{\substack{K' \in \mathcal{K}_{E \times F} \\ K' \subset N}} (\lambda \otimes \mu)[f(K')] = 0 \end{aligned}$$

Comme d'autre part $f(\mathcal{B}_{E \times F}^k) = \mathcal{B}_{E \times F}^k$ il résulte du lemme 7 que

$$f[(\mathcal{B}_{E \times F}^k)^{\lambda \otimes \mu}] \subset (\mathcal{B}_{E \times F}^k)^{\lambda \otimes \mu}$$

De façon analogue, et en utilisant que $f(\mathcal{B}_{E \times F}^{k_0}) = \mathcal{B}_{E \times F}^{k_0}$, on démontre que

$$f[(\mathcal{B}_{E \times F}^{k_0})^{\lambda \otimes \mu}] \subset (\mathcal{B}_{E \times F}^{k_0})^{\lambda \otimes \mu}$$

Enfin, soient $P \in \Lambda_{E \times F}^{\lambda \otimes \mu}$ et $K \in \mathcal{K}_{E \times F}$. Alors

$$f(P) \cap K = f(P) \cap f(K') = f(P \cap K')$$

où $K' \in \mathcal{K}_{E \times F} \subset (\mathcal{B}_{E \times F}^k)^{\lambda \otimes \mu}$, de sorte que

$$P \cap K' \in (\mathcal{B}_{E \times F}^k)^{\lambda \otimes \mu}$$

d'où, compte tenu de ce qui précède,

$$f(P) \cap K \in (\mathcal{B}_{E \times F}^k)^{\lambda \otimes \mu} \subset \mathcal{B}_{E \times F}^{\lambda \otimes \mu}$$

Ceci ayant lieu pour tout $K \in \mathcal{K}_{E \times F}$, il en résulte que $f(P) \in \Lambda_{E \times F}^{\lambda \otimes \mu}$ d'où finalement

$$f(\Lambda_{E \times F}^{\lambda \otimes \mu}) \subset \Lambda_{E \times F}^{\lambda \otimes \mu}.$$

Remarques

1. On pourrait énoncer des résultats analogues au lemme 8 et au théorème 24 en remplaçant les compacts de BAIRE, éléments de $\mathcal{K}_{O_E}$ et $\mathcal{K}_{O_F}$, par des ouverts de BAIRE, éléments de $\mathcal{O}_E \cap \mathcal{B}_E^{k_0}$ et $\mathcal{O}_F \cap \mathcal{B}_F^{k_0}$, relativement compacts.

2. Avec les hypothèses du théorème 24, on n'a pas en général $f(\mathcal{B}_{E \times F}^{\lambda \otimes \mu}) \subset \mathcal{B}_{E \times F}^{\lambda \otimes \mu}$ mais seulement $f(\mathcal{B}_{E \times F}^{\lambda \otimes \mu}) \subset \Lambda_{E \times F}^{\lambda \otimes \mu}$.

Soit en effet $N \in \mathcal{B}_{E \times F}$ tel que $(\lambda \otimes \mu)(N) = 0$. Si, avec P. COURREGÉ dans [5], nous désignons par $\overline{\lambda \otimes \mu}$ le prolongement essentiel de la mesure de BOREL (régulière) associée à $\lambda \otimes \mu$, nous avons

$$\begin{aligned} \overline{\lambda \otimes \mu} [f(N)] &= \sup_{\substack{K \in \mathcal{K}_{E \times F} \\ K \subset f(N)}} (\lambda \otimes \mu)(K) \\ &= \sup_{\substack{K' \in \mathcal{K}_{E \times F} \\ K' \subset N}} (\lambda \otimes \mu)[f(K')] = 0 \end{aligned}$$

de sorte que $f(N)$ est localement de $(\lambda \otimes \mu)$ -mesure nulle. Alors, si $M \subset N$, on a $M \in \mathcal{B}_{E \times F}^{\lambda \otimes \mu}$ tandis que $f(M)$ est seulement localement de $(\lambda \otimes \mu)$ -mesure nulle, donc $f(M) \in \Lambda_{E \times F}^{\lambda \otimes \mu}$.

Lemme 9.

Soient E et F des espaces localement compacts munis respectivement de mesures de RADON positives λ et μ supposées "complétion régular".

$$\text{Alors} \quad (\mathcal{B}_E^k \otimes \mathcal{B}_F^k)^{\lambda \otimes \mu} = (\mathcal{B}_{E \times F}^{k_0})^{\lambda \otimes \mu}$$

Démonstration

De façon générale, si $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ sont deux σ -clans de parties d'ensembles E_1 et E_2 respectivement, $\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$ désigne le σ -clan produit engendré dans $E_1 \times E_2$ par les ensembles du type $A_1 \times A_2$ où $(A_1, A_2) \in \mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2$ (produit cartésien).

Comme par hypothèse $\mathcal{B}_E^k \subset (\mathcal{B}_E^{k_0})^\lambda$ et $\mathcal{B}_F^k \subset (\mathcal{B}_F^{k_0})^\mu$, il vient

$$\mathcal{B}_E^k \otimes \mathcal{B}_F^k \subset (\mathcal{B}_E^{k_0})^\lambda \otimes (\mathcal{B}_F^{k_0})^\mu.$$

D'autre part, si $(A, B) \in (\mathcal{B}_E^{k_0})^\lambda \times (\mathcal{B}_F^{k_0})^\mu$, on a $A = A_1 \cup A_2$ avec $A_1 \in \mathcal{B}_E^{k_0}$ et $A_2 \subset M \in \mathcal{B}_E^{k_0}$, $\lambda(M) = 0$
 $B = B_1 \cup B_2$ avec $B_1 \in \mathcal{B}_F^{k_0}$ et $B_2 \subset N \in \mathcal{B}_F^{k_0}$, $\mu(N) = 0$

D'où

$$\begin{aligned} A \times B &= (A_1 \times B_1) \cup (A_1 \times B_2) \cup (A_2 \times B_1) \cup (A_2 \times B_2) \\ \text{avec } A_1 \times B_1 &\in \mathcal{B}_E^{k_0} \otimes \mathcal{B}_F^{k_0} = \mathcal{B}_{E \times F}^{k_0} \text{ d'après [13], § 51,} \\ \text{théorème E, et} \\ (A_1 \times B_2) \cup (A_2 \times B_1) \cup (A_2 \times B_2) &\subset (A_1 \times N) \cup (M \times B_1) \cup (M \times N) = P \\ \text{où } P &\in \mathcal{B}_E^{k_0} \otimes \mathcal{B}_F^{k_0} = \mathcal{B}_{E \times F}^{k_0} \text{ et } (\lambda \otimes \mu)(P) = 0 \end{aligned}$$

Il en résulte $A \times B \in (\mathcal{B}_{E \times F}^{k_0})^{\lambda \otimes \mu}$, de sorte que

$$(\mathcal{B}_E^{k_0})^\lambda \otimes (\mathcal{B}_F^{k_0})^\mu \subset (\mathcal{B}_{E \times F}^{k_0})^{\lambda \otimes \mu}$$

et par suite

$$\mathcal{B}_E^k \otimes \mathcal{B}_F^k \subset (\mathcal{B}_{E \times F}^{k_0})^{\lambda \otimes \mu}.$$

Enfin, en utilisant

$$\mathcal{B}_{E \times F}^{k_0} = \mathcal{B}_E^{k_0} \otimes \mathcal{B}_F^{k_0} \subset \mathcal{B}_E^k \otimes \mathcal{B}_F^k$$

il vient

$$(\mathcal{B}_E^k \otimes \mathcal{B}_F^k)^\lambda \otimes \mu = (\mathcal{B}_{E \times F}^{k_0})^\lambda \otimes \mu.$$

Remarquons qu'il n'en résulte pas en général que $\lambda \otimes \mu$ soit une mesure de RADON "completion regular" car on peut seulement affirmer que

$$\mathcal{B}_E^k \otimes \mathcal{B}_F^k \subset \mathcal{B}_{E \times F}^k$$

(A ce sujet voir [5] et [1] où un contre-exemple de R. A. JOHNSON est indiqué en exercice).

Dans toute la suite, G désigne un groupe topologique localement compact d'élément unité e et μ une mesure de HAAR à gauche sur G.

Lemme 10.

Soit λ une mesure de RADON positive quelconque sur G.

Alors l'application S de $G \times G$ dans lui-même définie par

$$S(r,s) = (r, r^{-1}s)$$

est un homéomorphisme et, si $A, B \in \mathcal{B}_G^k$, on a

$$(\lambda \otimes \mu)[S(A \times B)] = (\lambda \otimes \mu)(A \times B).$$

Démonstration

L'application S est manifestement un homéomorphisme.

Alors, si $A, B \in \mathcal{B}_G^k$ on a

$$A \times B \in \mathcal{B}_G^k \otimes \mathcal{B}_G^k \subset \mathcal{B}_{G \times G}^k$$

d'où $S(A \times B) \in \mathcal{B}_{G \times G}^k$ et

$$\begin{aligned} (\lambda \otimes \mu)[S(A \times B)] &= \int \mu(\{s ; (r,s) \in S(A \times B)\}) d\lambda(r) \\ &= \int_A \mu(r^{-1}B) d\lambda(r) \\ &= \lambda(A) \mu(B) = (\lambda \otimes \mu)(A \times B). \end{aligned}$$

Il résulte de ce lemme 10 que l'hypothèse du théorème 24 est largement vérifiée par S . Les inclusions indiquées par ce théorème sont donc réalisées et se réduisent même à des égalités car il est évident que l'application réciproque S^{-1} de S définie par

$$S^{-1}(r,s) = (r,rs)$$

jouit des mêmes propriétés que S . En particulier

$$S[(\mathcal{B}_{G \times G}^{k_0})^\lambda \otimes \mu] = (\mathcal{B}_{G \times G}^{k_0})^\lambda \otimes \mu.$$

Supposons maintenant que la mesure λ soit "completion regular". Comme μ est une mesure de HAAR donc aussi "completion regular", on a

$$(\mathcal{B}_G^k \otimes \mathcal{B}_G^k)^\lambda \otimes \mu = (\mathcal{B}_{G \times G}^{k_0})^\lambda \otimes \mu$$

d'après le lemme 9 et par suite on peut écrire

$$S[(\mathcal{B}_G^k \otimes \mathcal{B}_G^k)^\lambda \otimes \mu] = (\mathcal{B}_{G \times G}^{k_0})^\lambda \otimes \mu.$$

Sous cette forme, et en remarquant que J. BOCLE dans [2] suppose implicitement que la mesure de RADON qu'il considère, autre que la mesure de HAAR, est "completion regular" (voir [1]), il est clair que le résultat de mesurabilité ci-dessus généralise celui obtenu par cet auteur, à savoir :

$(A,B \in \mathcal{B}_G^k, \text{ relativement compacts})$ entraîne

$$S(A \times B) \in (\mathcal{B}_{G \times G}^{k_0})^\lambda \otimes \mu.$$

Lemme 11.

Soit λ une mesure de RADON positive quelconque sur G . Soit f une application de G dans $\mathbb{R}$ telle que $f \in \mathcal{M}(G, \Lambda_G^\mu)$ et soit F l'application de $G \times G$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$F(r,s) = f(rs) - f(s)$$

Alors

$$F \in \mathcal{M}(G \times G, \Lambda_{G \times G}^{\lambda \otimes \mu}).$$

Démonstration

Pour $c \in \mathbb{R}$ on a d'une part

$$\{(r,s) ; (r,s) \in G \times G, f(s) \leq c\} = G \times \{s ; s \in G, f(s) \leq c\} \\ = G \times A$$

avec $A \in \Lambda_G^\mu$, d'où $G \times A \in \Lambda_{G \times G}^{\lambda \otimes \mu}$ d'après [3], de sorte que la fonction qui à $(r,s) \in G \times G$ associe $f(s)$ appartient à $\mathcal{M}(G \times G, \Lambda_{G \times G}^{\lambda \otimes \mu})$.

D'autre part

$$\{(r,s) ; (r,s) \in G \times G, f(rs) \leq c\} = S(G \times A) \in \Lambda_{G \times G}^{\lambda \otimes \mu}$$

d'après ce qui précède et le théorème 24, et par suite la fonction qui à $(r,s) \in G \times G$ associe $f(rs)$ appartient encore à $\mathcal{M}(G \times G, \Lambda_{G \times G}^{\lambda \otimes \mu})$.

D'où le résultat annoncé.

Lemme 12

Soit λ une mesure de RADON positive quelconque sur G . On considère des fonctions f et F comme dans le lemme 11 avec de plus $f \in \mathcal{L}_{loc}^1(\mu)$. Soit d'autre part $g \in \mathcal{L}_{loc}^1(\lambda)$.

Alors la fonction gF définie sur $G \times G$ par

$$(gF)(r,s) = g(r) F(r,s)$$

appartient à $\mathcal{L}_{loc}^1(\lambda \otimes \mu)$.

Démonstration

Le lemme 11 et la première partie de sa démonstration montrent que

$$gF \in \mathcal{M}(G \times G, \Lambda_{G \times G}^{\lambda \otimes \mu}) .$$

Il faut établir que $gF \chi_C \in \mathcal{L}^1(\lambda \otimes \mu)$ pour tout $C \in \mathcal{K}_{E \times F}$. Pour cela il suffit de montrer que $gF \chi_{H \times K} \in \mathcal{L}^1(\lambda \otimes \mu)$ pour tout couple $(H,K) \in \mathcal{K}_E \times \mathcal{K}_F$.

Or nous avons

$$\begin{aligned} & \int^* d\lambda(r) \int^* |(gF)(r,s)| \chi_{H \times K}(r,s) d\mu(s) \\ &= \int^* |g(r)| \chi_H(r) d\lambda(r) \int^* |F(r,s)| \chi_K(s) d\mu(s) \end{aligned}$$

et, pour $r \in H$,

$$\begin{aligned} & \int^* |F(r,s)| \chi_K(s) d\mu(s) \leq \int^* [|f(rs)| + |f(s)|] \chi_K(s) d\mu(s) \\ & \leq \int^* |f(rs)| \chi_K(s) d\mu(s) + \int^* |f(s)| \chi_K(s) d\mu(s) \\ &= \int^* |f(t)| \chi_{rK}(t) d\mu(t) + \int^* |f(s)| \chi_K(s) d\mu(s) \\ & \leq \int^* |f(t)| \chi_{(H.K) \cup K}(t) d\mu(t) = M < +\infty \end{aligned}$$

car $f \in \mathcal{L}_{loc}^1(\mu)$.

D'où, puisque $g \in \mathcal{L}_{loc}^1(\lambda)$,

$$\begin{aligned} & \int^* d\lambda(r) \int^* |(gF)(r,s)| \chi_{H \times K}(r,s) d\mu(s) \\ & \leq M \int^* |g(r)| \chi_H(r) d\lambda(r) < +\infty. \end{aligned}$$

Comme $gF \cdot \chi_{H \times K}$ est évidemment $(\lambda \otimes \mu)$ -modérée au sens de BOURBAKI dans [3], il vient

$$gF \cdot \chi_{H \times K} \in \mathcal{L}^1(\lambda \otimes \mu)$$

d'où le résultat.

Lemme 13.

Soit λ une mesure de RADON positive quelconque sur G .
Soient d'autre part $g \in \mathcal{L}_{loc}^1(\mu)$, A une partie de G μ -mesurable, relativement compacte et telle que $\int_A g d\mu > 0$, et B une partie de G λ -mesurable relativement compacte.

Alors

$$\lambda(B) = \int \frac{\int_B g_{s,A} d\lambda}{\int g_{s,A} d\mu} d\mu(s)$$

où, pour chaque $s \in G$, $g_{s,A}$ est la fonction définie sur G par

$$g_{s,A}(t) = (\chi_A \cdot g)(ts^{-1}).$$

Démonstration

Soit Δ le module de G .

Nous allons montrer que la fonction qui à $(t,s) \in G \times G$ associe

$$\chi_{As \cap B}(t) \Delta (s^{-1}) g(ts^{-1})$$

appartient à $\mathcal{L}^1(\lambda \otimes \mu)$.

Commençons par établir que cette fonction est $(\lambda \otimes \mu)$ -mesurable.

Il est d'abord évident que la fonction qui à $(t,s) \in G \times G$ associe $\chi_B(t) \Delta (s^{-1})$ est $(\lambda \otimes \mu)$ -mesurable.

Posons maintenant $h = \chi_A \cdot g$ et soit $\check{h}$ la fonction définie sur G par $\check{h}(s) = h(s^{-1})$. Cette fonction est μ -mesurable donc, pour tout $c \in \mathbb{R}$, on a

$$A = \{s ; s \in G, \check{h}(s) \leq c\} \in \Lambda_G^\mu.$$

Considérons l'homéomorphisme T de $G \times G$ sur lui-même défini par

$$T(t,s) = (t, st)$$

Alors on a

$$T(G \times A) \in \Lambda_{G \times G}^{\lambda \otimes \mu}$$

car T vérifie les hypothèses du théorème 24. En effet, si $P, Q \in \mathcal{B}_G^k$, il vient

$$\begin{aligned} (\lambda \otimes \mu)[T(P \times Q)] &= \int_P \mu(Qt) d\lambda(t) \\ &= \mu(Q) \int_P \Delta(t) d\lambda(t) \\ &= \mu(Q) \cdot \lambda'(P) = (\lambda' \otimes \mu)(P \times Q) \end{aligned}$$

où λ' , définie par $\lambda' = \Delta \cdot \lambda$, est une mesure de RADON de base λ .

Comme, d'autre part,

$$\begin{aligned} T(G \times A) &= \{(t,s) ; (t,s) \in G \times G, st^{-1} \in A\} \\ &= \{(t,s) ; h(ts^{-1}) \leq c\} \end{aligned}$$

on obtient que la fonction qui a $(t,s) \in G \times G$ associe

$$\chi_{AS}(t) g(ts^{-1}) = (\chi_A \cdot g)(ts^{-1}) = h(ts^{-1})$$

est $(\lambda \otimes \mu)$ -mesurable ; d'où finalement la mesurabilité désirée.

Puisque $g \in \mathcal{L}_{loc}^1(\mu)$, on a

$$\begin{aligned} & \int^* \chi_A(ts^{-1}) |g(ts^{-1})| \Delta(s^{-1}) d\mu(s) \\ &= \int^* \chi_A(r) |g(r)| d\mu(r) = M < +\infty \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} & \int^* \chi_B(t) d\lambda(t) \int^* \chi_A(ts^{-1}) |g(ts^{-1})| \Delta(s^{-1}) d\mu(s) \\ &= \lambda(B) \cdot M < +\infty . \end{aligned}$$

Il en résulte que la fonction envisagée au début, et dont on vient de démontrer qu'elle est $(\lambda \otimes \mu)$ -mesurable, appartient à $\mathcal{L}^1(\lambda \otimes \mu)$ d'après [3] car elle est $(\lambda \otimes \mu)$ -modérée puisque nulle hors de l'ensemble relativement compact $A \times (B^{-1}A)$.

Alors le théorème de FUBINI permet d'écrire

$$\begin{aligned} \lambda(B) \int_A g(r) d\mu(r) \\ &= \int \Delta(s^{-1}) d\mu(s) \int \chi_{As \cap B}(t) g(ts^{-1}) d\lambda(t) \end{aligned}$$

d'où

$$\lambda(B) = \int \frac{\Delta(s^{-1}) \int_B g_{s,A}(t) d\lambda(t)}{\int_A g(r) d\mu(r)} d\mu(s)$$

et comme

$$\begin{aligned} \int_A g(r) d\mu(r) &= \Delta(s^{-1}) \int_{As} g(ts^{-1}) d\mu(t) \\ &= \Delta(s^{-1}) \int g_{s,A}(t) d\mu(t) \end{aligned}$$

il vient

$$\lambda(B) = \int \frac{\int_B g_{s,A} d\lambda}{\int g_{s,A} d\mu} d\mu(s) .$$

Ce lemme 13 généralise doublement la proposition 1 de J. BOCLE dans [2]. D'abord parce que l'énoncé que nous dirons "ensembliste" de cette proposition n'est qu'un cas particulier de ce lemme "fonctionnel". Ensuite à cause de l'absence ici de toute hypothèse sur la mesure de RADON λ alors que nous avons déjà remarqué que J. BOCLE suppose implicitement que la mesure qui, dans son travail, tient lieu de λ , est "completion regular".

2.3. Théorèmes de dérivation

Lemme 14.

On considère des fonctions f et F comme dans le lemme 12 et une fonction $g \in \mathcal{L}_{loc}^1(\mu)$ avec $g \geq 0$. A l'ensemble $A \subset G$ on associe la fonction $g_{s,A}$ du lemme 13.

Alors, pour tout couple (A,D) de parties de G μ -mesurables et relativement compactes, avec $\int_A g \, d\mu > 0$, on a

$$\begin{aligned} \int_D \left| \frac{\int g_{s,A} f \, d\mu}{\int g_{s,A} \, d\mu} - f(s) \right| d\mu(s) \\ \leq \frac{\int_A g(r) \, d\mu(r) \int_D |F(r,s)| \, d\mu(s)}{\int_A g \, d\mu} \end{aligned}$$

Démonstration

Si A et B sont deux parties de G μ -mesurables et relativement compactes, on a

$$(g.F) \chi_{A \times B} \in \mathcal{L}^1(\mu \otimes \mu)$$

d'après le lemme 12, d'où

$$\begin{aligned} \int_{A \times B} g(r) F(r,s) \, d(\mu \otimes \mu)(r,s) \\ = \int_B d\mu(s) \int_A g(r) F(r,s) \, d\mu(r) \\ = \int_A g(r) \, d\mu(r) \int_B F(r,s) \, d\mu(s) \end{aligned}$$

D'autre part, en utilisant le module Δ de G , il vient

$$\begin{aligned} \int_A g(r) F(r,s) \, d\mu(r) \\ = \int_A g(r) f(rs) \, d\mu(r) - \int_A g(r) f(s) \, d\mu(r) \\ = \int_A g(r) \, d\mu(r) \left[\frac{\int_{As} g(ts^{-1}) f(t) \, d\mu(t)}{\int \Delta(s) \int_A g(r) \, d\mu(r)} - f(s) \right] \\ = \int_A g(r) \, d\mu(r) \left[\frac{\int g_{s,A}(t) f(t) \, d\mu(t)}{\int g_{s,A}(t) \, d\mu(t)} - f(s) \right] \end{aligned}$$

Il en résulte

$$\int_B \left[\frac{\int g_{s,A} \cdot f \, d\mu}{\int g_{s,A} \, d\mu} - f(s) \right] d\mu(s) \\ = \frac{1}{\int_A g \, d\mu} \int_A g(r) \, d\mu(r) \int_B F(r,s) d\mu(s)$$

et, en se référant à un argument élémentaire utilisé par J. BOCLE dans [2], il vient, pour toute partie D de G μ -mesurable et relativement compacte

$$\int_D \left[\frac{\int g_{s,A} \cdot f \, d\mu}{\int g_{s,A} \, d\mu} - f(s) \right] d\mu(s) \\ \leq \frac{1}{\int_A g \, d\mu} \int_A g(r) \, d\mu(r) \int_D |F(r,s)| \, d\mu(s) .$$

Un résultat analogue au suivant est établi par J. BOCLE dans [2]. La démonstration donnée ici est de même inspiration mais plus simple.

Lemme 15.

Soit $\varphi = f \cdot \mu$, où $f \in \mathcal{L}_{loc}^1(\mu)$, une mesure de RADON sur G , positive de base μ , et soit F définie comme dans le lemme 11.

Alors, pour tout compact K de G , la fonction qui à $r \in G$ associe

$$\int_K |F(r,s)| \, d\mu(s)$$

est continue en $e \in G$.

Démonstration

Il s'agit de démontrer que

$$\lim_{r \rightarrow e} \int_K |F(r,s)| \, d\mu(s) = 0 .$$

Ceci étant trivialement réalisé si $\mu(K) = 0$, nous supposons $\mu(K) > 0$.

Donnons-nous un réel $\epsilon > 0$.

Soit K_1 un compact de G tel que $K \subset \overset{\circ}{K}_1$. Comme φ est une mesure de base μ , on sait qu'il existe un réel $\delta > 0$ tel que

$$(A \in \mathcal{B}_E^k, A \subset K_1, \mu(A) \leq \delta) \text{ entraîne } \varphi(A) \leq \frac{\epsilon}{3}.$$

D'autre part, d'après le théorème de LUSIN, il existe un compact K_2 de G tel que l'on ait

$$K_2 \subset K, \mu(K - K_2) \leq \delta \text{ et } f \text{ continue sur } K_2.$$

On peut même dire que f est uniformément continue sur K_2 , de sorte qu'il existe un voisinage V de e , dont on peut toujours supposer qu'il vérifie $VK \subset K_1$, tel que

$$(r \in V, s \in K_2) \text{ entraîne } |F(r,s)| = |f(rs) - f(s)| \leq \frac{\epsilon}{3 \mu(K)}$$

Alors, pour tout $r \in V$ et en remarquant que

$$r(K - K_2) \subset VK \subset K_1$$

$$\text{et } \mu[r(K - K_2)] = \mu(K_1 - K_2) \leq \delta$$

on a

$$\begin{aligned} & \int_K |F(r,s)| d\mu(s) \\ & \leq \int_{K-K_2} f(rs) d\mu(s) + \int_{K-K_2} f(s) d\mu(s) + \int_{K_2} |F(r,s)| d\mu(s) \\ & = \varphi[r(K - K_2)] + \varphi(K - K_2) + \int_{K_2} |F(r,s)| d\mu(s) \\ & \leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3 \mu(K)} \mu(K_2) \leq \epsilon \end{aligned}$$

ce qui démontre le lemme.

Théorème 25.

Soit $\varphi = f \cdot \mu$, où $f \in \mathcal{L}_{loc}^1(\mu)$, une mesure de RADON sur
G, positive de base μ .

Soit $\mathcal{G}$ l'ensemble des fonctions définies sur G , à support
compact, positives, μ -intégrables et d'intégrale non nulle.

Soit $\mathcal{F}$ un filtre sur $\mathcal{G}$ tel que, pour tout voisinage V
de l'élément unité e de G , il existe un $\phi \in \mathcal{F}$ tel que
 $(\text{supp } g) \subset V$ pour tout $g \in \phi$.

Alors :

(a) Pour tout $g \in \mathcal{G}$, la fonction $\Gamma(g)$ définie sur G par

$$[\Gamma(g)](s) = \frac{\int g(ts^{-1}) d\varphi(t)}{\int g(ts^{-1}) d\mu(t)}$$

appartient à $\mathcal{L}_{loc}^1(\mu)$.

(b) L'application Γ de $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{L}_{loc}^1(\mu)$ définie en (a)
converge vers f suivant le filtre $\mathcal{F}$ pour la topolo-
gie de la convergence en moyenne sur tout compact dans
 $\mathcal{L}_{loc}^1(\mu)$.

Démonstration

(a) Désignons par K un compact et posons $A = \text{supp } G$.
Alors, si Δ est le module de G et si

$$\alpha = \left[\inf_{s \in K} \Delta(s) \right]^{-1}$$

il vient

$$\begin{aligned} & \int_{A.K}^* d\varphi(t) \int_K^* g(ts^{-1}) d\mu(s) \\ &= \int_{A.K}^* d\varphi(t) \int_K^* \frac{g(ts)}{\Delta(s)} d\mu(s) \\ &\leq \alpha \int_{A.K}^* d\varphi(t) \int_K^* g(ts) d\mu(s) \\ &= \alpha \int_{A.K}^* d\varphi(t) \int_K^* \chi_{tK}(s) g(s) d\mu(s) \\ &\leq \alpha \varphi(A.K) \int_{A.K^2} g(s) d\mu(s) < +\infty \end{aligned}$$

Comme la fonction qui à $(t, s) \in G \times G$ associe $\chi_{A.K}(t) \cdot \chi_K(s) g(ts^{-1})$ est $(\varphi \otimes \mu)$ -mesurable (voir démonstration du lemme 13) et $(\varphi \otimes \mu)$ -modérée, l'intégrale

$$\int_K d\mu(s) \int_{AK} g(ts^{-1}) d\varphi(t)$$

existe, ce qui permet d'écrire

$$\begin{aligned} \int_K \frac{\int g(ts^{-1}) d\varphi(t)}{\int g(ts^{-1}) d\mu(t)} d\mu(s) \\ = \frac{1}{\int g d\mu} \int_K \left[\frac{1}{\Delta(s)} \int g(ts^{-1}) d\varphi(t) \right] d\mu(s) \\ \leq \frac{\alpha}{\int g d\mu} \int_K d\mu(s) \int_{AK} g(ts^{-1}) d\varphi(t) < +\infty \end{aligned}$$

d'où le résultat désiré.

(b) Soit K un compact de G . Alors, si $g \in \mathcal{G}$ et puisque g est à support compact, il résulte du lemme 14 que

$$\begin{aligned} \int_K \left| \frac{\int g(ts^{-1}) d\varphi(t)}{\int g(ts^{-1}) d\mu(t)} - f(s) \right| d\mu(s) \\ \leq \frac{1}{\int g d\mu} \int g(r) d\mu(r) \int_K |F(r, s)| d\mu(s) \end{aligned}$$

Soit un réel $\varepsilon > 0$. D'après le lemme 15, il existe un voisinage V de e tel que

$$r \in V \text{ entraîne } \int_K |F(r, s)| d\mu(s) \leq \varepsilon$$

D'autre part, il existe par hypothèse un $\Phi \in \mathcal{F}$ tel que l'on ait $(\text{supp } g) \subset V$ pour tout $g \in \Phi$. Alors il est immédiat que

$$g \in \Phi \text{ entraîne } \int_K \left| \frac{\int g(ts^{-1}) d\varphi(t)}{\int g(ts^{-1}) d\mu(t)} - f(s) \right| d\mu(s) < \varepsilon.$$

La conséquence suivante est immédiate

Corollaire 10.

Soit $\varphi = f \cdot \mu$, où $f \in \mathcal{L}_{loc}^1(\mu)$, une mesure de RADON sur
G, positive de base μ , soit $g \in \mathcal{L}_{loc}^1(\mu)$, positive, et soit
 $\mathcal{A}$ l'ensemble des parties A de G μ -mesurables et relativement
compactes telles que $\int_A g d\mu > 0$.

Soit $\mathcal{F}$ un filtre sur $\mathcal{A}$ tel que, pour tout voisinage V
de e dans G, il existe un $\Sigma \in \mathcal{F}$ tel que $A \subset V$ pour tout
 $A \in \Sigma$.

Alors :

(a) Pour tout $A \in \mathcal{A}$, la fonction $\gamma(A)$ définie sur G par

$$[\gamma(A)](s) = \frac{\int (g\chi_A)(ts^{-1}) d\varphi(t)}{\int (g\chi_A)(ts^{-1}) d\mu(t)}$$

appartient à $\mathcal{L}_{loc}^1(\mu)$.

(b) L'application γ de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{L}_{loc}^1(\mu)$ définie en (a) converge
vers f suivant le filtre $\mathcal{F}$ pour la topologie de la conver-
gence en moyenne sur tout compact dans $\mathcal{L}_{loc}^1(\mu)$.

Remarques

1. Dans le cas particulier où l'on prend $g = 1$, le corollaire 10 ci-dessus généralise ensore le théorème 1 de J. BOCLE dans [2].
2. Le filtre $\mathcal{F}$ considéré dans le théorème 25 correspond exactement à la notion d'"approximate identity" introduite indépendamment par C. IONESCU TULCEA dans [20].

Dans le cas d'une mesure étrangère à μ on peut énoncer le résultat suivant.

Théorème 26.

Soit ψ une mesure de RADON sur G , positive et étrangère à μ .

Soit $\mathcal{G}'$ l'ensemble des fonctions définies sur G , à support compact, symétrique et contenant e , positives, μ -intégrables et d'intégrale non nulle.

Soit $\mathcal{F}'$ un filtre sur $\mathcal{G}'$ tel que, pour tout voisinage V de e dans G , il existe un $\phi' \in \mathcal{F}'$ tel que $(\text{supp } g) \subset V$ pour tout $g \in \phi'$.

Alors :

(a) Pour tout $g \in \mathcal{G}'$, la fonction $\Pi(g)$ définie sur G par

$$[\Pi(g)](s) = \frac{\int g(ts^{-1}) d\psi(t)}{\int g(ts^{-1}) d\mu(t)}$$

appartient à $\mathcal{L}_{loc}^1(\mu)$.

(b) L'application Π de $\mathcal{G}'$ dans $\mathcal{L}_{loc}^1(\mu)$ définie en (a) converge vers 0 suivant le filtre $\mathcal{F}'$ en mesure sur tout compact dans $\mathcal{L}_{loc}^1(\mu)$.

Démonstration

(a) Même démonstration que pour le théorème 25, (a).

(b) La mesure ψ étant étrangère à μ , il existe dans G un ensemble N ψ - et μ -mesurable, localement μ -négligeable et tel que ψ soit concentré sur N .

Considérons un compact K de G .

Soit V un voisinage compact de e . Alors $V.K$ est compact et $\mu[(V.K) \cap N] = 0$, si bien que, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un ouvert U relativement compact tel que

$$(V.K) \cap N \subset U \text{ et } \mu(U) < \varepsilon.$$

Soit U un tel ouvert et soit un réel $\varepsilon' > 0$.

Il existe un compact C tel que

$$C \subset U \text{ et } \psi(U - C) < \varepsilon'$$

et il existe un voisinage V' de e tel que

$$V'.C.V' \subset U.$$

Soit $A \subset V'$ un compact symétrique tel que $e \in A$ et soit U_A le plus grand des ouverts Ω tels que $A \cdot \Omega \subset U$.

Alors on a

$$C \subset C \cdot V' \subset U_A \subset U$$

D'autre part, si $s \in G$ est tel que $As \cap U_A \neq \emptyset$, il existe un $a \in A$ tel que $as \in U_A$, d'où $Aas \in U$. Comme A est symétrique, on a aussi $a^{-1} \in A$, d'où $s \in U$.

Soit maintenant $g \in \mathcal{G}'$ et posons $A = \text{supp } g$. Nous désignerons par g_s la fonction définie sur G par $g_s(t) = g(ts^{-1})$. Du lemme 13 et des remarques précédentes il résulte :

$$\begin{aligned} \psi(U) &= \int \frac{\int_U g_s d\psi}{\int g_s d\mu} d\mu(s) \\ &\geq \int_U \frac{\int_{U_A} g_s d\psi}{\int g_s d\mu} d\mu(s) = \int \frac{\int_{U_A} g_s d\psi}{\int g_s d\mu} d\mu(s) = \psi(U_A) \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} &\int_{K-U} \frac{\int_U g_s d\psi}{\int g_s d\mu} d\mu(s) \\ &\leq \frac{\int_U g_s d\psi}{\int g_s d\mu} d\mu(s) - \int_U \frac{\int_{U_A} g_s d\psi}{\int g_s d\mu} d\mu(s) \\ &= \psi(U) - \psi(U_A) \leq \psi(U) - \psi(C) < \varepsilon' \end{aligned}$$

D'autre part, si $A \subset V$ et si $s \in K$ on a

$$As \cap N \subset As \cap (V \cdot K) \cap N \subset As \cap U$$

d'où

$$\psi(As) = \psi(As \cap N) \leq \psi(As \cap U) \leq \psi(As)$$

c'est-à-dire

$$\psi(As \cap U) = \psi(As)$$

Il en résulte

$$\int_U g_s d\psi = \int g_s d\psi$$

et par suite, si $A = \{\text{supp } g\} \subset V \cap V'$, il vient

$$\int_{K-U} \frac{\int g_s d\psi}{\int g_s d\mu} d\mu(s) < \varepsilon'.$$

La fonction Π converge donc, suivant le filtre $\mathcal{F}'$, en moyenne vers 0 sur $K - U$, donc en μ -mesure vers 0 sur $K - U$, donc en μ -mesure vers 0 sur K puisque $\mu(U)$ est arbitrairement petit.

Corollaire 11.

Soit ψ une mesure de RADON sur G , positive et étrangère à μ , soit $g \in \mathcal{L}_{loc}^1(\mu)$, positive, et soit $\mathcal{A}'$ l'ensemble des parties A de G μ -mesurables, relativement compactes, telles que $\int_A g d\mu > 0$ et dont l'adhérence est symétrique et contient e .

Soit $\mathcal{G}'$ un filtre sur $\mathcal{A}'$ tel que, pour tout voisinage V de e dans G , il existe un $\Sigma' \in \mathcal{G}'$ tel que $A \subset V$ pour tout $A \in \Sigma'$.

Alors :

(a) Pour tout $A \in \mathcal{A}'$, la fonction $\pi(A)$ définie sur G par

$$[\pi(A)](s) = \frac{\int (g\chi_A)(ts^{-1}) d\psi(t)}{\int (g\chi_A)(ts^{-1}) d\mu(t)}$$

appartient à $\mathcal{L}_{loc}^1(\mu)$.

(b) L'application π de $\mathcal{A}'$ dans $\mathcal{L}_{loc}^1(\mu)$ définie en (a) converge vers 0 suivant le filtre $\mathcal{G}'$ en mesure sur tout compact dans $\mathcal{L}_{loc}^1(\mu)$.

Dans le cas particulier où $g = 1$, le corollaire 11 généralise encore le théorème 2 de J. BOCLE dans [2].

Le cas d'une mesure de RADON positive λ quelconque se déduit immédiatement de ce qui précède. Une telle mesure s'écrit en effet

$$\lambda = f \cdot \mu + \psi$$

où $f \in \mathcal{L}_{loc}^1(\mu)$ et où ψ est une mesure de RADON positive étrangère à μ . La convergence en moyenne entraînant la convergence en

mesure, la fonction Π (resp. π) du théorème 26 (resp. du corollaire 11) converge suivant le filtre $\mathcal{T}'$ (resp. $\mathcal{G}'$) vers f en mesure sur tout compact dans $\mathcal{L}_{loc}^1(\mu)$.

Enfin remarquons que tous les résultats ci-dessus s'étendent immédiatement aux cas où les mesures de RADON φ , ψ et λ seraient réelles quelconques ou complexes.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] S. K. BERBERIAN, *Measure and Integration*, Macmillan, New York, 1965
- [2] J. BOCLE, *Sur la théorie ergodique*, Ann. Inst. Fourier, 10, 1-45 (1960)
- [3] N. BOURBAKI, *Intégration*, chap. 1-5, Hermann, Paris, 1965
- [4] A. M. BRUCKNER, *Differentiation of Integrals*, The Amer. Math. Month. 78, 9, II, 1-51 (1971)
- [5] P. COURREGE, *Théorie de la mesure*, C. D. U., Paris, 1966
- [6] J. GAPAILLARD, *Sur un théorème de D. Maharam*, C. R. Acad. Sci., 271, 39-41 (1970)
- [7] —, *Sur un théorème de Kōlzow*, C. R. Acad. Sci., 271, 91-93 (1970)
- [8] —, *Sur la notion de base de dérivation fonctionnelle*, C. R. Acad. Sci., 271, 404-407 (1970)
- [9] —, *Dérivation fonctionnelle globale dans un groupe topologique localement compact*, C. R. Acad. Sci., 272, 247-250 (1971)
- [10] —, *Relèvements monotones*, A paraître dans Arch. der Math.
- [11] —, *Relèvements sur une algèbre de parties d'un ensemble*, A paraître aux C. R. Acad. Sci.
- [12] S. GRAF, Diplomarbeit, Erlangen, 1972
- [13] P. R. HALMOS, *Measure theory*, Van Nostrand, New York, 1950
- [14] O. HAUPT, G. AUMANN, C. Y. PAUC, *Differential- und Integralrechnung*, III, W. de Gruyter, Berlin, 1955
- [15] C. A. HAYES, C. Y. PAUC, *Derivation and Martingales*, Ergebnisse der Math., 49, Springer, Berlin - Heidelberg - New York, 1970
- [16] A. IONESCU TULCEA, *On the lifting property (V)*, Ann. Math. Stat., 36, 819-828 (1965)
- [17] A. IONESCU TULCEA, C. IONESCU TULCEA, *On the lifting property, I*, J. Math. Anal., 3, 537-546 (1961)

- [18] — —, *On the lifting property, II, Representation of linear operators on spaces L_E^r , $1 \leq r < \infty$* , J. Math. Mech., 11, 773-796 (1962)
- [19] — —, *Topics in the theory of Lifting*, Ergebnisse der Math., 48, Springer, Berlin - Heidelberg - New York, 1969
- [20] C. IONESCU TULCEA, *Liftings and derivation bases*, dans *Contributions to Ergodic Theory and Probability*, Lecture Notes in Mathematics, 160, Springer, Berlin - Heidelberg - New York, 1970
- [21] D. KÖLZOW, *Differentiation von Massen*, Lecture Notes in Mathematics, 65, Springer, Berlin - Heidelberg - New York, 1968
- [22] D. MAHARAM, *On a theorem of von Neumann*, Proc. Amer. Math. Soc., 9, 987 - 994 (1958)
- [23] J. von NEUMANN, M. H. STONE, *The determination of representative elements in the residual classes of a Boolean algebra*, Fund. Math., 25, 353-378 (1935)
- [24] J. C. OXToby, *Spaces that admit a category measure*, J. Reine angew. Math., 205, 156-170 (1960)
- [25] —, *Measure and Category*, Graduate Texts in Mathematics, 2, Springer, Berlin - Heidelberg - New York, 1971
- [26] R. de POSSEL, *Dérivation abstraite des fonctions d'ensemble*, J. Math. pures et appl., 15, 391-409 (1936)
- [27] —, *Sur la généralisation de la notion de système dérivant*, C. R. Acad. Sci., 224, 1187-1139 (1947)
- [28] —, *Sur les systèmes dérivants et l'extension du théorème de Lebesgue relatif à la dérivation d'une fonction de variation bornée*, C. R. Acad. Sci., 224, 1197-1198 (1947)
- [29] W. STRAUSS, *Funktionalanalytische Fassung des Satzes von Radon-Nikodým*, J. Reine angew. Math., 249, 92-132 (1971)

